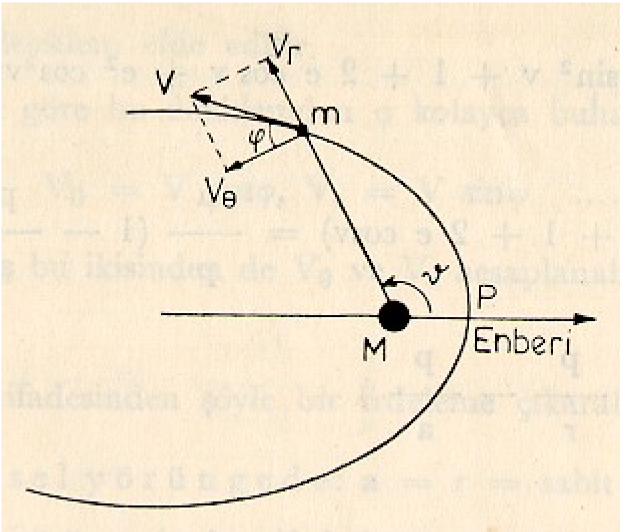
YÖRÜNGE MEKANİĞİ

Yörüngeden Hız Hesabı

Küçük bir cismin yörüngesi üzerinde verilen herhangi bir noktadaki hızı ve bu hızın doğrultusu nedir? Uydu ve çekim etkisinde bulunan cisim (Yer, gezegen, vs) ikili bir sistem oluştururlar. Sorun iki cisim problemidir.



Yukarıdaki şekilde M kütleli bir cisim etrafında dolanan m kütleli bir uydu gösterilmiştir. Buna göre V; yörünge hızı, V_θ teğetsel hız, V_r dikine (radyal) hız, φ ise yörünge hızının durum açısıdır. Şimdi elimizdeki parametreleri ve denklemleri sıralayalım.

Tanımlar:

Yarıçap vektörünün sayısal değeri: r
Gerçek ayrıklık : ν
Yörünge yarı-büyük eksen uzunluğu : a
Yörünge dış merkezliği : e
Eylemsizlik sabiti : μ

Bu tanımların matematiksel ifadelerini yazalım:

Yörüngenin Genel Denklemi: $r=\frac{p}{1+e\cos v}$
Yörüngenin parametresi: $p=a\left(1-e^2\right)=h^2/\mu$
Eylemsizlik sabiti: $\mu=G\left(M+m\right)$
Alan sabiti: $h=r^2\dot{\theta}=r^2\dot{v}$

Bu verilenler kullanılarak istenen terimler: V_θ; Teğetsel hız bileşeni, V_r; Dikine hız bileşeni ve Vnin durum açısı φ dir. Amacımız yörüngeye ait **genel hız bağıntısını** bulmaktır.

Diğer yandan teğetsel hızın $V_\theta = r \{ \dot{\theta} = r \frac{d\theta}{dt}$ ¿ , dikine hızın ise $V_r = \dot{r} = \frac{dr}{dt}$ olduğunu biliyoruz.

Önce V_r nin dış merkezlik ve yörünge paremetresi cinsinden ifade edilen değerini bulalım. Yükarıdaki denklemler vasıtasıyla,

$V_r = \dot{r} = \frac{p\ e\ \sin\theta\ \dot{\theta}}{(1+e\ \cos\theta)^2}$ bulunur. $h = r^2 \dot{\theta}$ denkleminden $\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$ çekilip, ayrıca $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ bağıntısından $(1+e\cos\theta)$ çekilip, karesi alındıktan sonra V_r denkleminde yerine konulursa,

$$V_r = \frac{eh}{p} \sin\theta \qquad (1)$$

bulunur. Teğetsel hız ise $V_\theta = r \{ \dot{\theta} = r \frac{h}{r^2}$ ¿ den $V_\theta = \frac{h}{r}$ (2)

bulunur. $V^2 = V_r^2 + V_\theta^2$ denkleminde (1) ve (2) denklemleri yerine konulursa,

$$V^2 = \frac{e^2 h^2}{p^2} \sin^2\theta + \frac{h^2}{r^2} \qquad (3)$$

$\frac{1}{r^2} = \frac{(1+e\cos\theta)^2}{p^2}$ değerini (3) denkleminde yerine koyup gerekli kısaltmalar yapıldıktan sonra

$$V^2 = \frac{h^2}{p^2}(e^2 + 1 + 2e\cos\theta) \qquad (4)$$

elde edilir. $p = h^2 \mu$ bağıntısından μ çekilip (4) de yerine konulursa,

$V^2 = \frac{\mu}{p}(e^2 + 1 + 2e\cos\theta)$ bulunur. Bu denklemde e ve p terimlerinin yok edilmesi gerekmektedir. Bunun için $p = a(1-e^2)$ ifadesinden e^2 çekilir ve son bulunan V^2 denkleminde yerine konursa,

$$V^2 = \frac{\mu}{p}\left(1 - \frac{p}{a} + 1 + 2e\cos\theta\right)$$

$$V^2 = \frac{\mu}{p}\left(-\frac{p}{a} + 2(1+e\cos\theta)\right)$$

(1+ecosθ) ifadesi p/r ye eşit olduğundan

$$V^2 = \frac{\mu}{p}\left(\frac{2p}{r} - \frac{p}{a}\right)$$

sonuçta,

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \qquad (5)$$

elde edilir. Bu (5) nolu denkleme **Genel hız denklemi** denir.
Buraya kadar yapılanları özetlersek, genel hız denkleminden birçok yörünge üyesini tespit etmek mümkündür.

SONUÇ: μ, r, a ve e değerleri biliyorsa V hızı bulunabilir.

$p = a(1-e^2)$ denkleminden p değeri,

$h^2 = p\mu$ denkleminden h değeri,

$V_r = \frac{eh}{p}\sin\theta$ denkleminden V_r teğetsel hız değeri,

$V_\theta = \frac{h}{r}$ denkleminden V_θ dikine hız değeri,

$tg\ \phi = \frac{V_r}{V_\theta}$ denkleminden de V değeri hesaplanabilir.

(5) denklemini şimdi çeşitli yörünge türlerine uygulayalım.

Çeşitli Yörüngelerde Hız Bağıntıları

1) Dairesel Yörüngeler

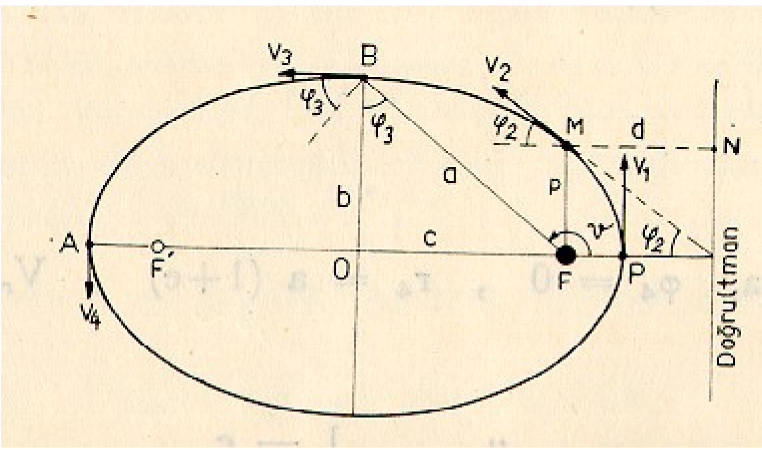
Dairede a = r = sabit olduğundan, V_r=0, dolayısıyla φ=0 olduğundan,

$$V_c^2 = \frac{\mu}{r} \tag{6}$$

olur, dolayısıyla $V_\theta = V_c$ dir. V_c dairesel yörüngedeki cismin hızıdır.

2) Eliptik Yörüngeleler

Eliptik bir yörüngede (elips) dolanan bir uydunun elipsin odaklarına olan uzaklığı devamlı değişmektedir. Odaklardan birinde bir gezegen bulunmaktadır. Dolayısıyla uydunun hızı da yörünge üzerinde sabit olmayıp devamlı değişmektedir. Elips şeklindeki bir yörüngede perihel, apel, küçük eksen uçları ve herhangi bir yerdeki hızlar farklı olmaktadır.



Yukarıdaki eliptik yörüngelerdeki P, enberi (perihel), A enöte (Afel), M parametri ucu, B ise küçük eksen ucunu göstersin. Şimdi bu noktalarda genel hız denkleminin ifadesini görelim.

a) Enberi noktası:

$\varphi_1=0$, $r_1=a(1-e)$ ve $V_r=0$ olduğundan $V_\vartheta=V_1$ olur ve $V_1^2=\frac{\mu}{a}\cdot\frac{1+e}{1-e}$ bulunur. V_1, enberide uydunun hızıdır.

b) Parametre ucundaki, (M noktasındaki) durum:

$tg\,\phi_2=\frac{r}{d}$, diğer yandan $e=\frac{p}{d}$ olduğundan, $tg\,\phi_2=e$ ve $r_2=p=a(1-e^2)$ olduğundan $V_2^2=\frac{\mu}{a}\frac{1+e^2}{1-e^2}$ bulunur. V_2 , M noktasında uydunun hızıdır. Hız bileşenleri ise şunlardır.

Radyal hız: $V_r=V_2\sin\phi_2$ ve teğetsel hız ise $V_\theta=V_2\cos\phi_2$ dir.

c) Yarı-küçük eksen ucunda, B noktasındaki durum

$\sin\phi_3=\frac{c}{a}=\frac{ae}{a}=e$ ve $r_3=a$ olduğundan $V_3^2=\frac{\mu}{a}$ dır. Diğer taraftan

$V_r=\frac{eh}{p}\sin v=\frac{eh}{p}\cdot\frac{b}{a}=\frac{eh}{p}\cdot\frac{a\sqrt{1-e^2}}{a}\Rightarrow V_r=\frac{eh}{p}\cdot\sqrt{1-e^2}$ bulunur. V_r nin başka bir ifadesi de,

$V_r=V_3\sin\phi_3=\sqrt{\frac{\mu}{a}}\cdot e$ dir ve $V\theta=\frac{h}{a}$ bulunur.

d) En Öte noktasında, yani A noktasında,

$\varphi_4=0$, $r_4=a(1-e)$, $V_r=0$, $V_\theta=V_4$ olduğundan, $V_4=\frac{\mu}{a}\cdot\frac{1-e}{1+e}$ olur.

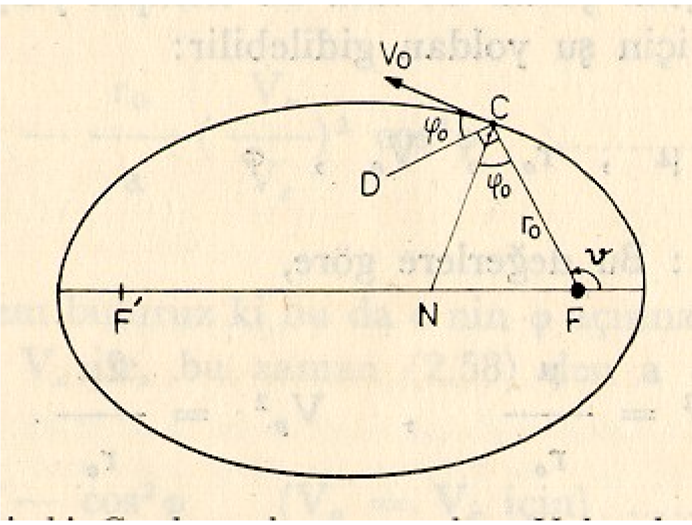
3) **Hiperbolik yörüngelerde genel hız bağıntısı:** $V_4^2=\mu(\frac{2}{r}+\frac{1}{a})$ dir.

4) **Parabolik yörüngelerde:** İkinci odak sonsuza gittiğinden a=∞ olur. Buradan da

$V_p^2=\frac{2\mu}{r}$ bulunur. Görülür ki $V_p^2=2V_c^2$ dir.

Hızdan Yörünge Hesabı

Yer yörüngesine oturtulmak istenen bir uydu, önce geçici bir yörüngeye oturtulur. Bu geçici yörünge daire veya daireye yakın bir elipstir. Uydunun yerden uzaklığı oldukça azdır. Uydu bu geçici yörüngede belli bir süre tutulduktan sonra istenilen kendi yörüngesine oturtulur. Yörünge değişimi eski yörüngesindeki hız ve uydunun sahip olduğu potansiyel enerji göz önüne alınarak yapılır. Geçici yörüngesinin uygun bir yerinde (genellikle enberi noktasında) yörünge motorları kısa süre çalıştırılarak yeni bir hız kazandırılır. Uydu yeni bir hız ve potansiyel enerjisindeki değişimden dolayı kendine yeni bir yörünge çizer. Bu yörünge uydunun gerçekte oturtulmak istendiği yörüngedir.



: Yer etrafında elips yörüngeli bir uydunun yörüngesi üzerinde C noktasından φ_0 açısıyla ve V_0 hızıyla yapılan bir fırlatma.

Verilenler:

Eylemsizlik sabiti: μ= G(M+m), M: Yer veya gezegen kütlesi, m: uydunun kütlesi
Fırlatma uzaklığı: r_0
Fırlatma hızı: V_0
Fırlatma durum açısı: φ_0

Kullanılacak Formüller:

Alan sabiti: $h = r_0 V_0 \cos \phi_0$

Parametre: $p = \dfrac{r_0^2 V_0^2 \cos^2 \phi_0}{\mu}$

Yarı büyük eksen: $a = \dfrac{r_0 \mu}{2\mu - r_0 V_0^2}$ (genel hız bağıntısından)

Dışmerkezlik: $e = \sqrt{1 - p/a}$

Dolanma peryodu: $P = 2\pi \sqrt{\dfrac{a^3}{\mu}}$

Amaç: Verilen μ, r_0, V_0 ve φ_0 değerlerine göre yeni yörüngenin şeklinin belirlenmesi. İlk işlem olarak

$V_c^2 = \dfrac{\mu}{r_0}$ ve $V_p^2 = \dfrac{2\mu}{r_0}$ denklemlerinden V_c ve V_p bulunur.

İkinci işlem, yarı büyük eksen bağıntısı $a = \dfrac{r_0 \mu}{2\mu - r_0 V_0^2}$ den *a* bulunur.

V_c, V_p ve **a** bilindiğine göre yörüngenin şekli hakkında bir kanıya varabiliriz:

$V_0^2 = V_p^2$ ise a = ∞ , yörünge bir parabol,

V_p^2

V_0^2 ise 0 < a < ∞ yörünge bir elips,

V_c^2

V_0^2

V_p^2 ise a < 0 yörünge hiperbol,

$V_0^2 = V_c^2$ ise a = r_0 yörünge daire ya da elipstir.

Üçüncü adım: $V_0^2 = V_c^2$ ise yörüngenin daire ya da elips olduğunu ayırt etmek için φ fırlatma açısına bakmak gerekir.

$p = a(1 - e^2)$ ve $p = \frac{r_0^2 V_0^2}{\mu} \cos^2 \phi$ denklemlerinden,

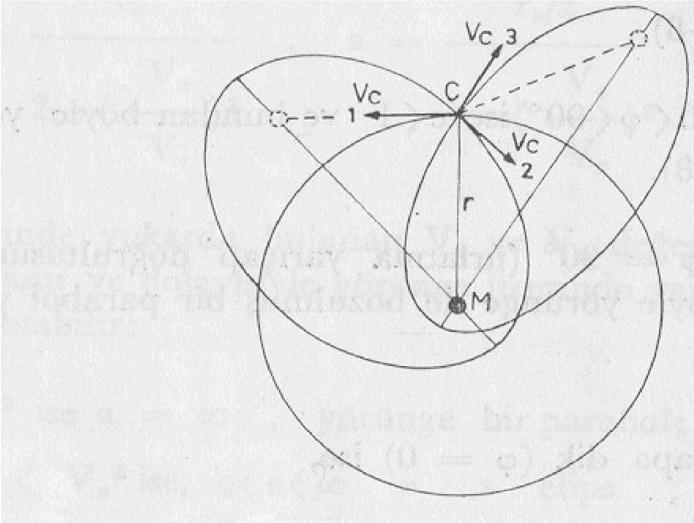
$e^2 = 1 - \frac{r_0^2 V_0^2}{\mu\, a} \cos^2 \phi$ ve bu denklemden de $e^2 = 1 - \frac{r_0}{a} \left(\frac{V_0}{V_c} \right)^2 \cos^2 \phi$ bulunur.

Eğer $V_0 = V_c$ ise, a = r_0 dır ve $e^2 = 1 - \cos^2 \phi$ dir. Buna göre ihtimaller:

a) $V_0 = V_c$ olduğunda φ = 0 olursa, e = 0 olur. Yörünge dairedir.
b) $V_0 = V_c$ olduğunda 0 < φ < 90 ise e < 1 olur. Yörünge elipstir.
c) $V_0 = V_c$ iken φ = 90 ise (fırlatma yarıçap doğrultusunda), e = ±1 olur. Yörünge bozulmuş bir paraboldur.

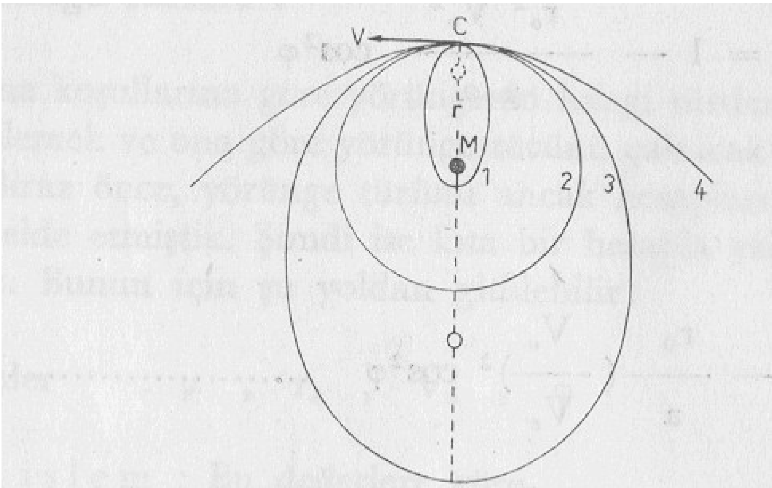
Dördüncü adım: Eğer fırlatma yarıçapa dik yani φ = 0 ise,

$e^2 = 1 - \frac{r_0}{a} \left(\frac{V_0}{V_c} \right)^2$ bağıntısı elde edilir. Bu durumda yeni yörünge elips, daire ve parabol yörüngeler olabilir. Aşağıdaki dört şekil farklı fırlatma açılarına göre oluşabilecek yeni yörüngeleri göstermektedir.



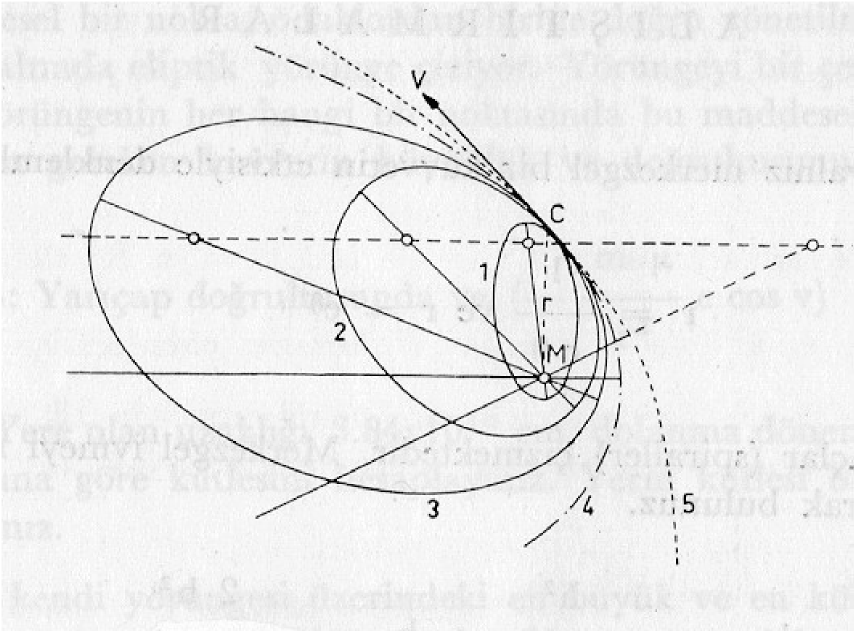
$V_o = V_c$ ile fırlatma.

1. Yörünge :	$\varphi = 0.$	; $a = r$,	$e = 0$
2. » :	$\varphi = 45°$	; $a = r$,	$e = 0.71$
3. » :	$\varphi = 60°$	; $a = r$,	$e = 0.87$



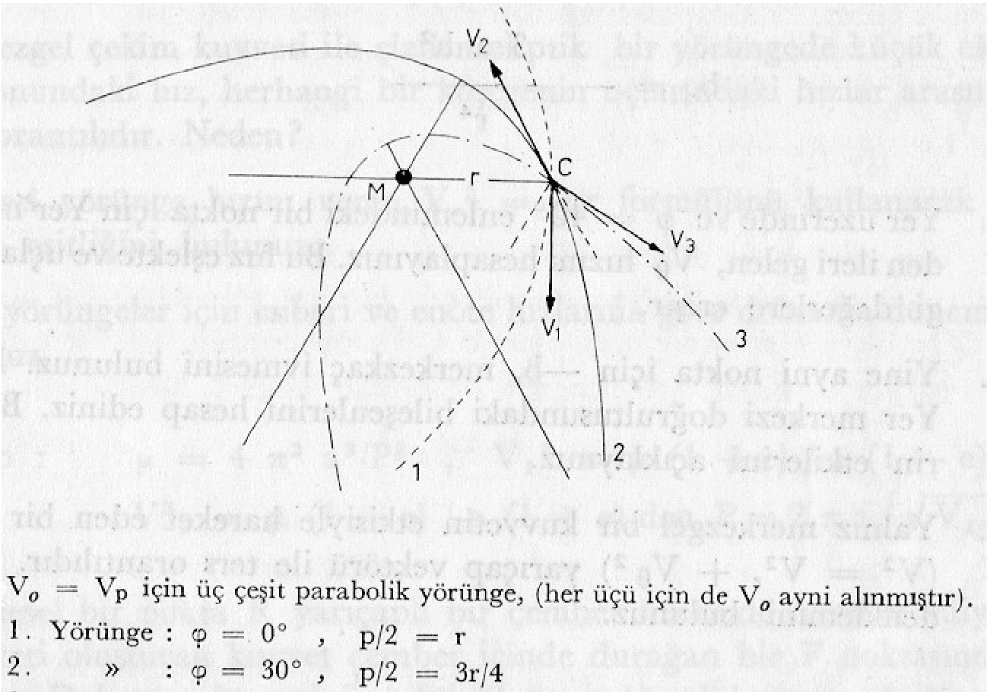
$\varphi = 0°$ lik bir fırlatma.

1. Yörünge :	$V_o/V_c = 0.5$;	$a/r = 0.57$,	$e = 0.75$
2. » :	» $= 1.0$;	» $= 1.00$,	$e = 0.00$
3. » :	» $= 1.2$;	» $= 1.78$,	$e = 0.44$
4. » :	» $= \sqrt{2}$;	» $= \infty$,	$e = 1$



$\varphi = 45°$ için beş çeşit yörünge.

1. Yörünge :	V/V_c	$= 0.5$;	a/r	$= 0.57$,	$e = 0.88$
2. » :	»	$= 1.0$;	»	$= 1.0$,	$e = 0.71$
3. » :	»	$= 1.2$;	»	$= 1.78$,	$e = 0.77$
4. » :	»	$= \sqrt{2}$;	»	$= \infty$,	$e = 1.00$
5. » :	»	$= 2$;	»	$= -0.5$,	$e = 2.23$



$V_o = V_P$ için üç çeşit parabolik yörünge, (her üçü için de V_o ayni alınmıştır).

1. Yörünge :	$\varphi = 0°$,	$p/2 = r$
2. » :	$\varphi = 30°$,	$p/2 = 3r/4$
3. » :	$\varphi = 60°$,	$p/2 = r/4$