DERS-3 $\bar{P}$ →1

ORTALAMA BASINÇ ($\bar{P}$):

Tanım: $\bar{P} = \frac{1}{M}\int_0^R P(r)\, dm(r)$

Bilgilendirme; a, b sınırları arasında $f(r)$ nin bir ortalama değeri varsa;

$$\int_a^b f(r).dg(r) = \overline{f(r)}\int_a^b dg(r) = \overline{f(r)}\,[g(b)-g(a)] \text{ dır.}$$

Bu tanımı, denklemimize uygularsak,

$$\int_0^R P(r)\, dm(r) = \overline{P(r)}\int_0^R dm(r) = \overline{P(r)}.M \quad \text{ve sonunda}$$

$$\bar{P}(r) = \frac{1}{M}\int_0^R P(r).dm(r)$$ dır. Şimdi denklemi daha kullanışlı hale getirelim.

$$M\bar{P} = \int_0^R \underset{u}{P(r)}.\underset{dv}{dm(r)} \rightarrow \int u.dv = u.v - \int v.du$$

$$\int_0^R P\,dm(r) = \underbrace{P.M(r)\Big]_0^R}_{0} - \int_0^R m(r).dP$$

ve hidrostatik denge denklemi $dP = -\frac{GM(r)dm(r)}{4\pi r^4}$ olduğundan.

$$\int_0^R P\,dm(r) = \int_0^R \frac{GM(r)^2.dm(r)}{4\pi r^4} \text{ olur.}$$

Sonuç olarak $M\bar{P} = \int_0^R \frac{GM(r)^2 dm(r)}{4\pi r^4}$ bulunur.

Şimdi $\bar{P}$ (ortalama basınç) için sınır değerler bulalım.

Bunun için 2 varsayım kullanalım.

I. VARSAYIM; $r \leq R$ olsun.

$\overline{P} \to 2$

$$M\overline{P} = \int_0^R \frac{GM(r)^2 \cdot dm(r)}{4\pi r^4} \geqslant \int_0^R \frac{GM(r)^2 \cdot dm(r)}{4\pi R^4} = \frac{G}{4\pi R^4}\int_0^R m(r)^2 dm(r)$$

$$= \frac{GM^3}{12\pi R^4}$$

Sonuç olarak; $\overline{P} \geqslant \dfrac{GM^2}{12\pi R^4}$ bulunur.

Daha önceden $r \leqslant R$ koşulu için merkezi basınç

$P_c \geqslant \dfrac{GM^2}{8\pi R^4}$ olarak bulmuştuk.

Buna göre $\boxed{\overline{P} = \dfrac{2}{3} P_c}$ bulunur.

Şimdi 2. varsayımdan hareketle ortalama basınç $(\overline{P})$ bulalım:

2.VARSAYIM; $\overline{\rho} \leqslant \overline{\rho(r)}$ olsun.

$\overline{\rho(r)} = \dfrac{m(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3}$ idi. Buna göre $\dfrac{1}{r^3} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi\overline{\rho(r)}}{m(r)}$ ve

$$\frac{1}{r^4} = \left[\frac{4/3\pi\,\overline{\rho(r)}}{m(r)}\right]^{4/3}$$ dır.

elde edilen değerleri ana bağıntımızda yerine koyalım.

$$M\overline{P} = \int_0^R \frac{Gm(r)^2 \cdot dm(r)}{4\pi r^4} = \frac{G}{4\pi}\int_0^R m(r)^2\left[\frac{\frac{4}{3}\pi\,\overline{\rho}(r)}{m(r)}\right]^{4/3} \cdot dm(r)$$

$$M\overline{P} \geqq \frac{G}{4\pi}\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{4/3} \cdot \overline{\rho}^{\,4/3}\int_0^R m(r)^{2/3} \cdot dm(r)$$

$$M\overline{P} \geqslant \frac{G}{4\pi}\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{4/3} \cdot \overline{\rho}^{\,\frac{4}{3}} \cdot \frac{3}{5} M^{5/3}$$ dır. Burada

$\overline{\rho} = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ olduğundan, yerine koyarsak

$$\bar{\rho}^{\frac{4}{3}} = \frac{M^{4/3}}{\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{4/3} \cdot R^4} \qquad \bar{P} \to 3$$

$$M\bar{P} \geqslant \frac{G}{\frac{4}{3}\pi}\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{4/3} \cdot \frac{M^{4/3}}{\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{4/3} \cdot R^4} \cdot \frac{M^{5/3}}{5} = \frac{3GM^3}{20\pi R^4} \text{ bulunur.}$$

varsayım $\bar{\rho} \leq \rho(r)$ olduğunda,

$$\bar{P} \geqslant \frac{3GM^2}{20\pi R^4}$$ olur. Bu ortalama basınç için bir alt sınırdır.

Şimdi kıyaslama yaparsak,

ortalama basınç $(\bar{P}) = \frac{2}{5}$ Merkezi basınç (P_c)

Eğer yıldızın yoğunluğu, yıldızın heryerinde aynı olduğu varsayılırsa, yıldızın ortalama basıncı, tam olarak alt sınıra eşit olur.

$\rho = \bar{\rho}$ için $\bar{P} = \frac{3GM^2}{20\pi R^4}$ olur.