YILDIZ İÇİNDE ENERJİ İLETİMİ DERS-5 E→1

Yıldızların içersindeki enerji, yıldızın dış katmanlarına doğru iki yolla iletilir.

1. Konveksiyon yolu ile (maddenin hareketi ile)
2. Radyasyon yolu ile

Eğer bir yıldızda konveksiyon akımları varsa, enerji büyük çoğunlukla konveksiyon akımları ile dış katmanlara iletilir. Geri kalan az bir enerjinin transferi ise radyasyon yoluyla olur. Ancak radyasyon yolu ile iletim çok çok küçüktür ve ihmal edilebilir. Bu nedenle bu iki iletim yolu, ayrı ayrı incelenmek zorundadır.

KONVEKSIYON AKIMLARI

Yıldızlardaki maddede atomlar tamamen iyonlaşmışlarsa, ortama monoatomik bir ortam diyebiliriz. Böyle bir ortamda atomlar dek başlarına hareket ederler. Bu hareketteki enerji, atomların yada parçacıkların kendi kinetik enerjilerinden meydana gelir.

Buna göre gazların kendi kinetik enerjilerinden dolayı bir iç enerjiden söz edebiliriz, bu da $U = \sum \frac{1}{2} m v^2$ dır ve bu U iç enerji $V cm^3$ lük bir hacımda bulunsun.

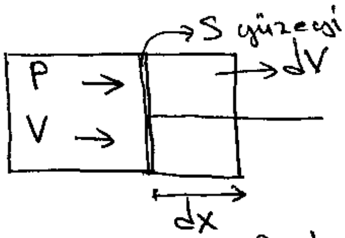
Varsayım; Bir gaz kütlesi, herhangi bir sebeple konveksiyon akımı ile hareket ediyorsa, dış ortamdan enerji alması veya dış ortama enerji vermesi için uzun bir zamana ihtiyaç vardır. Bu nedenle konveksiyon akımlarında enerji alış verişi yok kabul edilebilir. Yani gazın kaybettiği enerji $d\theta$ ise $d\theta = 0$ (Bu adyabatik bir durumdur) kabul edilir.

Eğer bir gaz hacmına $d\theta$ kadarlık bir enerji verilirse, bu $d\theta$'lık enerjinin bir kısmı iş yapar, bir kısmıda mevcut gazın iç enerjisine aktarılır.

Yani E→2

$$d\theta = dU + dW$$

Burada dU; Gazın iç enerjisine aktarılan kısım.
dW; Gazın yapmış olduğu iş'dir.



$$dV = S\cdot dx$$
$$dW = S\cdot P\cdot dx$$
$$dW = P\cdot dV$$

$P.S$ = piston yüzeyine uygulanan kuvvet.

$d\theta = dU + P.dV$ olur. Adyabatik bir durum söz konusu olduğundan $d\theta = 0$ olmak zorundadır, Yani

$$d\theta = dU + P.dV = 0 \text{ dır.}$$

Diğer taraftan gazın tüm enerjisini hesaplayalım.

$$U = \sum \frac{1}{2} m v^2 = N\left(\frac{1}{2}\overline{mv^2}\right)$$

$N \Rightarrow V$ hacmindeki parçacık sayısıdır, ve $N = N_1 \cdot V$

ideal gaz yasası $P = N_1 \cdot k \cdot T$ dir.

Bir gazda $\frac{1}{2}\overline{mv^2} = \frac{3}{2} kT$ idi. Buna göre

$$U = N\left(\frac{1}{2}\overline{mv^2}\right)$$
$$= N\left(\frac{3}{2}kT\right)$$
$$= V.N_1\left(\frac{3}{2}kT\right)$$

$U = \frac{3}{2} V.P \rightarrow$ Yıldızı oluşturan V hacmindeki gazın iç enerjisidir.

$$d\theta = dU + P.dV = 0 \qquad (1)$$

$$dU + P.dV = 0$$

$U = \frac{3}{2} PV$ dir, Diferansiyeli alırsak;

$dU = \frac{3}{2} P.dV + \frac{3}{2} V.dP$ bunu (1) denkleminde yerine koyarsak,

$\frac{3}{2} P.dV + \frac{3}{2} V.dP + P.dV = 0$ olur, her iki tarafı $2/3$ bölelim.

$$\frac{5}{2} P dV + \frac{3}{2} V dP = 0$$ ~~Bu denklemi ile 1/VP ye bölelim~~ E → 3

$$\frac{5}{3} P . dV + V dP = 0$$

Bu denklem, yıldız içinde V hacmında hacım ile basınç arasındaki ilişkiyi veren diferansiyel denklemdir. Bu denklemi 1/VP ile bölelim.

$$\frac{5}{3}\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$$

$$\frac{5}{3} d\ln V + d\ln P = 0$$

$$d\ln V^{5/3} + d\ln P = 0$$

$$\ln V^{5/3} + \ln P = \text{Sabit} \rightarrow \ln(V^{5/3} \cdot P) = \text{sabit}$$ ve sonuç olarak

$$V^{5/3} \cdot P = \text{Sabit}.$$

Bu denklemin yorumu, Yıldız monoatomik ve enerji adyabatik olarak konveksiyon akımları ile iletiliyorsa, basınç ve hacım arasında böyle bir bağıntı vardır.

$$\rho = \frac{\text{kütle}}{\text{Hacım}} = \frac{m}{V} \rightarrow V = \frac{m}{\rho}$$ şimdi V yi yerine koyup, P yi çekelim.

$$P = \frac{\text{Sbt}}{m^{5/3}} \cdot \rho^{5/3}$$ Burada $\frac{\text{Sbt}}{m^{5/3}} = k$ derselc $P = k \cdot \rho^{5/3}$ bulunur.

Şimdi, enerji konveksiyon akımlarıyla iletiliyorsa, elimdeki 3 denklemi ve bilinmeyenleri yazalım:

1. deklem $dM(r) = 4\pi \rho r^2 dr$
2. denklem $dP = -\frac{G M(r) \rho dr}{r^2}$
3. denklem $P = k \cdot \rho^{5/3}$ veya $P = k\rho^{\gamma}$ (adyabatik bağlantı)

Bilinmeyenler
$M(r)$
P
ρ

Problem çözülebilir.

Burada $\gamma = 5/3$, $\gamma = C_P / C_V$

O ve B tipi yıldızlarda, konvektif çekirdekler vardır.

Erken tip yıldızların yüzeyinden itibaren H ve He $E \rightarrow 3.1$ iyonlaşmış durumdadır,

Orta sıcaklıklardaki yıldızlarda, yüzeyde iyonlaşma yoktur.

İç kısımlara doğru olan iyonlaşma, konveksiyon akımlarını meydana getirir. Bu tür yıldızların yüzeye yakın bölümlerinde konvektif denge veya konveksiyon akımları vardır,

Bir yıldız oluşurken, toplanan gaz tamamen konvektif denge halindedir, Güneşten daha soğuk yıldızlara doğru gidildikçe yüzeye yakın konvektif bölge büyür. Ana kolun alt kısmında tüm yıldızlar konvektif denge halinde kabul edilir, Şimdi (1). denklemi integre edelim. E→4

$M(r)=\int_0^r 4\pi\rho r^2 dr$ dır. Bunu (2). denklemde yerine koyalım.

$$\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}+4\pi G\int_0^r \rho r^2 dr=0 \quad (*)$$ diyelim.

(3) nolu denklemi türetirsek,

$\frac{dP}{dr}=\gamma k\rho^{\gamma-1}\cdot\frac{d\rho}{dr}$ elde edilir. Bu bağıntıyı (*)da yerine koyalım.

$$\frac{r^2}{\rho}\left(\gamma k\rho^{\gamma-1}\frac{d\rho}{dr}\right)+4\pi G\int_0^r \rho r^2 dr=0$$ Şimdi parantezi için

düzenleme yaparsak,

$$\rho^{\gamma-2}\cdot\frac{d\rho}{dr} \longrightarrow \frac{r^2}{\cancel{\ }}\left(k\cdot\rho^{\gamma-2}\cdot\frac{d\rho}{dr}\right)+4\pi G\int_0^r \rho r^2 dr=0$$ olur.

$\rho^{\gamma-1}$ ifadesinin diferansiyelini alalım.

$$\frac{d\rho^{\gamma-1}}{dr}=(\gamma-1)\rho^{\gamma-2}\cdot\frac{d\rho}{dr} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{d\rho^{\gamma-1}}{dr}=\rho^{\gamma-2}\cdot\frac{d\rho}{dr}$$ bunu

denklemimizde yerine koyalım.

$$r^2\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}k\,\frac{d\rho^{\gamma-1}}{dr}\right)+4\pi G\int_0^r \rho r^2 dr=0$$ Düzenlersek.

$$\left(\frac{\gamma k}{4\pi G(\gamma-1)}\right)\left(r^2\frac{d\rho^{\gamma-1}}{dr}\right)+\int_0^r \rho r^2 dr=0$$ Şimdi bu bağıntının

türevini alalım.

$$\left(\frac{\gamma k}{4\pi G(\gamma-1)}\right)\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2\, d\rho^{\gamma-1}}{dr}\right)+\rho r^2=0 \quad (**)$$

Yeni değişken tanımlamalarını yapalım. E→5

$$\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{\gamma-1} = y$$ olsun. ρ_c = merkezi yoğunluk olsun. Buna göre

$\rho^{\gamma-1} = \rho_c^{\gamma-1} \cdot y$ aynı zamanda $\frac{d}{dr}\rho^{\gamma-1} = \rho_c^{\gamma-1} \cdot \frac{dy}{dr}$ bu bağıntıyı

(**) da yerine yazarsak,

$$\left(\frac{\gamma k \rho_c^{\gamma-1}}{4\pi G(\gamma-1)}\right)\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dy}{dr}\right) + \rho r^2 = 0$$

$r=0 \rightarrow y=1$

$r=R \rightarrow y=0$ dır.

$r=\alpha x$ olsun. Burada x: yeni değişken, α: bir sabit. Buna göre

$dr = \alpha dx$

$$\left(\frac{\gamma k \rho_c^{\gamma-1}}{4\pi G(\gamma-1)}\right)\frac{d}{\alpha dx}\left(\alpha^2 x^2\frac{dy}{\alpha dx}\right) + \underbrace{\rho_c y^{1/\gamma-1}}_{\rho} \cdot \alpha^2 \underbrace{r^2}_{\rightarrow x^2} = 0$$

Sonuç olarak,

$$\left(\frac{\gamma k \rho_c^{\gamma-2}}{4\pi G(\gamma-1)\alpha^2}\right)\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) + y^{1/\gamma-1} \cdot x^2 = 0$$

Bu bağıntıda α değeri öyle belirlenmeli, denklem boyutsuz olsun. Yani katsayı ( ) = 1 olmalı.

$$\alpha^2 = \frac{\gamma k \rho_c^{\gamma-2}}{4\pi G(\gamma-1)}$$ olursa,

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) + y^{1/\gamma-1} \cdot x^2 = 0$$ elde edilir.

E → 6

$\frac{1}{\gamma-1} = n$: politropik indeks olsun. Yerine koyarsak, (Not: $P = k\rho^{\gamma} \rightarrow P = k\rho^{\frac{n+1}{n}}$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{dy}{dx}\right) + x^2 y^{n} = 0$$ düzenlersek,

$$\boxed{\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{dy}{dx}\right) + y^n = 0}$$

Bu denkleme LANE-EMDEN DENKLEMİ DENİR.

Emden denkleminin, analitik çözümü $n=0$, $n=1$ ve $n=5$ için mümkündür.

Bu denklem boyutsuzdur ve bütün yıldızlar için aynıdır.

Bu denklemin özel çözümü halinde, her x için Y değeri nümerik hesaplanabilir. Öyle bir $x = x_1$ değeri bulunur ki, $y = 0$ olur. (Yıldızın yüzeyi için çözüm).

r biliniyorsa, α bulunur, x bulunur.

Bu x'e karşılık gelen y bulunur.

$\rho^{\gamma-1} = \rho_c^{\gamma-1} \cdot y \rightarrow y$ belli. ρ_c belli $= \rho$ belli.

* Bu denkleme ileride yeniden dönüp, analitik çözümü yapılacak.