Enerjinin Radyasyon Yoluyla Yayılması Hali R→1

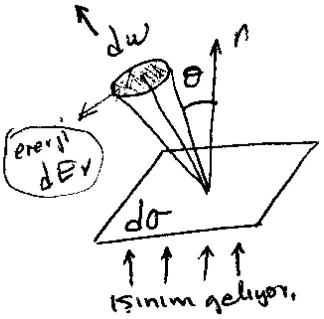
Özgül şiddet (Spesifik şiddet) DERS-6

İki türlü tanım yapabiliriz

1) Belli bir dalga boyu için (monokromatik özgül şiddet)

2) Tüm dalgaboyları için (toplam veya integral şiddet)

Monokromatik özgül şiddet (I_ν)



$d\sigma$: yüzey

$d\omega$: katı açı

$$\frac{dE_\nu}{d\sigma \cos\theta \, d\nu \, d\omega \cdot dt}$$ ⇒ bütün enerjinin birim alana, birim frekansa, birim katı açıya birim zamana indirgenmesi.

Eğer bu indirgemenin bir limiti varsa, buna özgül şiddet I_ν denir. Yani

$$I_\nu = \lim \frac{dE_\nu}{d\sigma \cos\theta \, d\nu \, d\omega \, dt}$$ ve limit her zaman vardır.

Yani

$$dE_\nu = I_\nu \, d\sigma \cos\theta \, d\nu \, d\omega \, dt$$ → monokromatik ışınım

$$\int_0^\infty dE_\nu = d\sigma \cos\theta \, d\omega \, dt \underbrace{\int_0^\infty I_\nu \, d\nu}$$ → toplam özgül şiddet.

$$\boxed{dE = I \, d\sigma \cos\theta \, d\omega \, dt}$$

dE_ν, miktarını birim zamana ve birim yüzeye indirgersek,

$$dE_\nu = I_\nu \cos\theta \, \frac{d\sigma}{1} \, d\omega \, d\nu \, \frac{dt}{1}$$

$$dE_\nu = I_\nu \, d\nu \, \underline{\cos\theta} \, d\omega$$

θ açısını tüm uzaya integre edersek, $dE_\nu \rightarrow F_\nu$ ye dönüşür ve FLUKS (AKI) adını alır.

$$F_\nu = \int_{4\pi} I_\nu \, d\nu \cos\theta \, d\omega$$ → buna monokromatik net akı denir.

R→2

$$F_\nu = \int_{4\pi} I_\nu \, d\nu \cos\theta \, d\omega$$

Her iki tarafında ν'ye göre integre edersek, TOPLAM IŞINIMIN FLUKSUNU buluruz.

$$F = \int_{4\pi} I \cos\theta \, d\omega$$ → İntegral akı denir.

$$d\omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$F = \int_{4\pi} I \cos\theta \, d\omega = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} I \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

I, φ ye bağlı değildir, ancak θ ye bağlı olabilir.

$$F = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} I \cos\theta \sin\theta \, d\theta$$ ve sonuç olarak

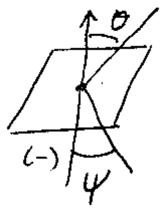
$$F = 2\pi \int_0^{\pi} I \cos\theta \sin\theta \, d\theta$$ dır ve buna NET AKI (NET FLUKS denir)

birim yüzeye (dω) iki yerden ışınım gelebilir.

1) Aşağıdan gelip, yukarıya çıkan ışınımın fluksu $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

2) Yukarıdan gelip, aşağıya giden ışınımın fluksu $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$

$$F = 2\pi \int_0^{\pi/2} I \cos\theta \sin\theta \, d\theta + 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} I \cos\theta \sin\theta \, d\theta$$



$\psi = \pi - \theta$

Net akı $F = F^+ - F^-$ dır.

Özgül şiddet, isotropik (eş yönlü) dür. ve θ ve φ ye bağlı değildir.

Bu nedenle $F = 0$ dır.

Sonuç; isotropik radyasyon halinde net akı (fluks) SIFIRDIR.

Şimdi F^+ hesaplayalım. R→3

$$F^+ = 2\pi I \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta$$

Ara bilgi: → $\int \sin\theta \, d(\sin\theta) = \frac{\sin^2\theta}{2}$

$$F^+ = 2\pi I \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d(\sin\theta) -$$

$$= 2\pi I \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = 2\pi I \left[\frac{1}{2} - 0\right]$$

$\boxed{F^+ = \pi I}$ açıklaması: İsotropik radyasyon halinde yalnız bir yarım kürede giden ışınımın fluksı ve özgül şiddet fluks ile arandılılar. Aynı şekilde

$F^- = \pi I$ olduğundan $F = F^+ - F^- = 0$ dır.

IŞINIMIN ENERJİ YOĞUNLUĞU

$dE = I \, d\sigma \, d\omega$ (Burada $\cos\theta = 1$)

Birim zamanda geçen enerji. Geçen enerji ışık olduğuna göre, birim zamanda c kadar yol alır.

O halde birim yüzeyden ($d\sigma = 1$) 1 sn'de c uzaklığa ulaşan enerji $I\,d\omega$ dir.

1cm² den geçen ($d\sigma = 1\,cm^2$) ve yüksekliği c dan hacımdan geçen enerji $I\,d\omega$ idi. Bu hacımdaki enerjiyi c ye bölersek, birim hacımdaki enerji bulunur.

$\frac{I\,d\omega}{c}$ bu $d\omega$ doğrultusundaki birim ~~ener~~ hacımdaki enerjidir,

1cm³ içinden tüm uzaya (her doğrultuda) giden enerjiye U dersek,

$U = \int_{4\pi} \frac{I\,d\omega}{c}$ dir ve birim hacımdaki enerji yoğunluğudur.

isotropik radyasyon olması durumunda,

$$U = \frac{I}{c}\int_{4\pi} d\omega = \frac{4\pi}{c} I \longrightarrow \boxed{U = \frac{4\pi}{c} I}$$ olur.

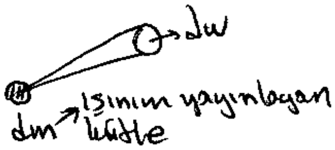
R→4

$U=\frac{4\pi}{c}I$ enerji yoğunluğu, özgül şiddet ile orantılıdır.

$F=\pi I$ olduğundan,

$U=\frac{4}{c}F^{+}$, enerji yoğunluğu ile flüks arasında böyle bir bağıntı vardır.

EMİSYON KATSAYISI

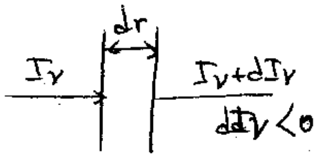


dω katı açısı içindeki enerji miktarı dE_ν ise, bunu birim frekansa, birim katı açıya, birim zamana, birim kütleye indirgersek, sonucun limitine emisyon katsayısı (j_ν) denir.

$$j_\nu=\frac{dE_\nu}{d\nu\, d\omega\, dt\, dm}$$

$$\boxed{dE_\nu=j_\nu \cdot dm \cdot d\nu\, d\omega\, dt}$$

ABSORBSİYON KATSAYISI



$$dI_\nu=-I_\nu \underbrace{\chi_\nu}_{\text{absorbsiyon katsayısıdır.}} \rho\, dr$$

İntegre edersek.

$$\frac{dI_\nu}{I_\nu}=d\ln I_\nu=-\chi_\nu \rho\, dr$$

$$\ln I_\nu=-\int_0^{r}\chi_\nu \rho\, dr+\ln I_{\nu 0} \rightarrow \ln\frac{I_\nu}{I_{\nu 0}}=-\int_0^r \chi_\nu \rho\, dr$$

$$I_\nu=\overset{\circ}{I}_\nu \cdot e^{-\underbrace{\int_0^r \chi_\nu \rho\, dr}_{d\tau_\nu}}$$

$d\tau_\nu$: optik derinliğin diferansiyeline denir.

yani

$$\int_0^r \chi_\nu \rho\, dr=\int_0^{\tau_\nu} d\tau_\nu \rightarrow \tau_\nu=\int_0^r \chi_\nu \rho\, dr \quad :\rightarrow \text{optik derinlik.}$$

$$\boxed{I_\nu=\overset{\circ}{I}_\nu\, e^{-\tau_\nu}}$$ elde edilir.

Sistem termodinamik denge halinde (bir karacisim gibi) ölü iken, yıldızın iç kısımlarına gidildikçe absorbsiyon katsayısı artar. R→S

KİRCHOFF YASASI;

Absorbsiyon katsayısının, emisyon katsayısına oranı, sadece sıcaklığa ve ν frekansına bağlıdır.

$$\frac{\chi_\nu}{J_\nu} = B_\nu(T) = I_\nu$$

Anlamı; $B_\nu(T)$ oranı, Yersel termodinamik denge halindeki bölgenin özgül monokromatik ışık şiddetidir. $B_\nu(T)$ fonksiyonu, teorik olarak Planck tarafından bulunmuştur. ve

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\left(\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}\right)$$ Bu Planck kanunudur.

Tüm frekanslar için hesaplamak istersek,

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu(T)\,d\nu$$

$$= \frac{2\pi^4 k^4}{15c^2h^3}T^4$$ ve karacisim radyasyonu, isotropik radyasyondur.

Özgül şiddet T ile orantılı ise, akı da T ile orantılıdır ve bu kanuna Stefan-Boltzmann kanunu denir.

$$U = \frac{4\pi}{c}I \rightarrow U = \frac{4\pi}{c}B(T) \rightarrow U = \underbrace{\frac{8\pi^5k^4}{15c^3h^3}}_{\alpha = 7.55\times10^{-15}\,(cgs)}T^4$$

Diğer taraftan

$F^+ = \sigma T^4$ (Sadece bir yarım kürede yayınlanan ~~ışık~~ akı)

σ ile α arasındaki bağıntı nedir?

$$F^+ = \pi I$$

$$F^+ = \pi\cdot B(T) = \underbrace{\frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}}_{\sigma}T^4$$ olduğundan

$\sigma = a\frac{c}{4} \rightarrow \boxed{\frac{\sigma}{a} = \frac{c}{4}}$ bulunur.   R→6

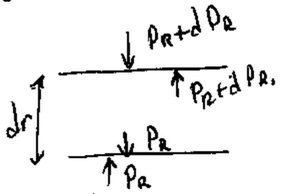
Radyasyon basıncı, enerji yoğunluğunun $\frac{1}{3}$'e eşittir.

Enerji yoğunluğu $U = \alpha \cdot T^4$ olduğundan,

$\boxed{P_R = \frac{\alpha}{3}T^4}$ dür.

Şimdi bu astrofizik denklemlerini, bir yıldızın iç yapısına uygulayalım. Yıldızın içerisinde bir dr tabakası düşünelim. Sıcaklık yüzeye doğru azalıyor. Dolayısıyla radyasyon basıncı da dışarıya doğru azalıyor.

Varsayım; Yıldızımız radyatif denge halinde. ~~dr tabakasına~~ dr tabakası ne kadar enerji absorbluyorsa, o kadarda yayınlıyor. Yüzeye yaklaştıkça tabakaların enerjileri azalıyor, dalga boyları uzuyor. Radyasyon basıncı varsa, radyasyonda bir denge problemi olmalı.



Her iki yüzeyde de denge var. Ancak yüzeyler arasında bir kuvvet farkı vardır.

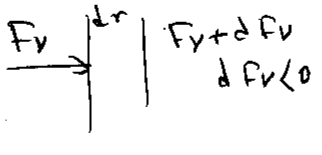
$P_R - (P_R + dP_R) = -dP_R$ Bu fark, tabakayı yüzeye doğru iter.

Şimdi bu $-dP_R$ kuvvetini hesaplayalım.

Absorblanan radyasyon ne kadar momentum kaybeder?

Radyasyonun momentumu: $mc = \frac{E}{c}$

Demekki radyasyon enerjisini c ile bölersek, radyasyonun momentumu elde edilir.



$dF_\nu = -F_\nu \chi_\nu \rho\, dr$, dr tabakasından absorblanan enerji, ve bunun momentumu

$$\frac{dF_\nu}{c} = -\frac{F_\nu \chi_\nu \rho\, dr}{c}$$ ↗ 1 sn'de absorblanan enerjinin momentumu

$$-\frac{dF_\nu}{c} = \frac{F_\nu \chi_\nu \rho dr}{c}$$ bu bağıntı, basınç değişimine eşit olmalıdır,

$$-\frac{dF_\nu}{c} = -dP_R \longrightarrow dF_\nu = -F_\nu \chi_\nu \rho dr$$

$$dP_R = -\frac{F_\nu \chi_\nu \rho dr}{c} \longrightarrow$$ bu radyasyon basıncının diferansiyelidir,

Şimdi bir tanım yapalım. r yarıçaplı, $M(r)$ kütlesi olan kürenin yüzeyinden 1 sn'de yayınlanan ışıma gücü, $L(r)$ olsun. Ortalama bir dP_R bulmak için,

$$dP_R = -\frac{F_\nu \chi_\nu \rho dr}{c}$$ bunu ν'ye göre integre edelim.

$$dP_R = -\frac{F \chi \rho dr}{c}$$, diğer taraftan

$$L(r) = 4\pi r^2 F \longrightarrow F = \frac{L(r)}{4\pi R^2}$$

$$dP_R = -\frac{L(r)\chi \rho dr}{4\pi c r^2}$$ dir. Halbuki $P_R = \frac{\alpha}{3} T^4$ idi.

Bunun türevi $dP_R = \frac{4}{3}\alpha T^3 dT$ olur. Bunu eşitlersek,

$$dT = -\frac{3\chi \rho L(r) dr}{16\pi \alpha c r^2 T^3}$$ bulunur.

Bu ince tabakanın her gramının ürettiği enerji ε olsun.

Buna göre

$$dL(r) = dM(r)\cdot \varepsilon$$

$$dM(r) = 4\pi \rho r^2 dr$$ olduğundan

$$dL(r) = 4\pi \varepsilon \rho r^2 dr$$ olur.

Şimdi, enerjinin radyasyon ışınımıyla iletildiğini varsayarak, bulduğumuz denklemleri derleyelim. R→8

$dM(r) = 4\pi \rho r^2 dr$ (kütle sürekliliği)

$dL(r) = 4\pi \varepsilon \rho r^2 dr$

$dP = -\frac{G M(r) \rho dr}{r^2}$ (hidrostatik denge)

$dT = -\frac{3\chi \rho L(r) dr}{16\pi a c r^2 T^3}$ (sıcaklık gradyenti)

$P = \frac{k}{\mu m_H} \rho T$ (ideal gaz denklemi)

Bilinmeyenler: $M(r)$, $L(r)$, ρ, P, T

Bilinmeyen sayısı: 5, denklem sayısı 5, o halde problem çözülebilir.

Tüm denklemlerde ρ olduğundan, ideal gaz denkleminde ρ çekilip diğer 4 denklemde yerine konulursa, 4 denklem 4 bilinmeyen olur. Ancak,
bu dört diferansiyel denklemden oluşan sistemin analitik çözümü yoktur. (Bazı özel durumlar hariç)

Sayısal Çözüm Hakkında Bilgi;

Başlangıç koşullarımız;

Yıldız Merkezi	Yıldızın Yüzeyi
$r=0$	$r=R$
$L(r)=0$	$P=0$
$M(r)=0$	$T=0$

Herbiri için 4 koşul gerekiyor. Halbuki merkezde 2, yüzeyde 2 koşul biliniyor. Bu durumda integrasyon bir yüzeyden, bir merkezden yapılır. Bu tahminde diğer 2 ekstra koşul tahmini alınır. Tahminler doğru yapıldıysa iki integrasyon bir noktada çakışır. Çakışmaz ise tahminler değiştirilerek çakışma sağlanır. (Bu yöntem tarihte kaldı).

R→9.

Analitik çözüm hakkında;

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\chi\rho L(r)}{16\pi a c r^2 T^3} \quad \text{(radyatif bölge için)}$$

Bu denklem şu şekilde elde edilmişti.

$$\frac{dP_R}{dr} = -\frac{\chi\rho L(r)}{4\pi c r^2} \quad \text{ve} \quad \frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2}$$

$P = P_G + P_R$ idi. Bu denklemleri taraf tarafa bölersek,

$$\frac{dP_R}{dP} = \frac{\chi\rho L(r)}{4\pi c r^2}\cdot\frac{r^2}{GM(r)\rho} \quad \text{ve sonuç olarak}$$

$$\frac{dP_R}{dP} = \frac{\chi L(r)}{4\pi c G M(r)} \quad \text{bulunur. Bu denklemde}$$

$\frac{L(r)}{M(r)} = \overline{\varepsilon(r)}$ yani r yarıçaplı kürenin içindeki gram başına ortalama enerji üretimi idi. $\overline{\varepsilon(r)}$ değeri, r küçüldükçe büyür. r büyükse $\overline{\varepsilon(r)}$ değeri küçülür. $\overline{\varepsilon(r)}$'yi denklemimizde yerine koyarsak,

$$\boxed{\frac{dP_R}{dP} = \frac{\chi\overline{\varepsilon(r)}}{4\pi c G}}$$

olur. Şimdilik bu denklem kenarda dursun, χ, absorbsiyon katsayısı üzerinde de bazı işlemler yapalım.

Absorbsiyon, genellikle fotoiyonizasyondan kaynaklanır. Fotoiyonizasyon olması için, ~~elektron~~ atomun etrafında bir miktar elektron olması gerekir. Atomun çevresindeki elektronlar yıldız yüzeyine gidildikçe artar. Bu iyonlaşmış atomlar absorbsiyona neden olurlar. Absorbsiyon yıldız merkezine doğru etkisini kaybeder. Absorbsiyon katsayısı r büyüdükçe büyür, r küçüldükçe azalır. O halde χ ile $\overline{\varepsilon(r)}$ ters değişirler.

Buradan şu sonuç çıkarılabilir, $R \rightarrow 10$

$\frac{dP_R}{dP} = \frac{\chi \overline{\varepsilon(r)}}{4\pi c G}$ burada $\chi \overline{\varepsilon(r)}$ miktarı, biri büyürken, diğeri küçüldüğü için SABİT kabul edilebilir.

EDDINGTON, bu miktarı sabit kabul ederek (r'ye göre) denklemleri ~~çözmüştür~~ çözmeye çalışmıştır.

$$\frac{dP_R}{dP} = \frac{\chi \overline{\varepsilon(r)} \rightarrow \text{sabit}}{\underset{\downarrow \atop \text{sabit}}{4\pi c G}} = 1-\beta \quad (\beta < 1) \text{ diyelim.}$$

$\frac{dP_R}{dP} = 1-\beta$ dersek $\frac{P_G}{P} = \beta$ ve $\frac{P_R}{P} = 1-\beta$ dur,

Ara ispat;

$dP_R = (1-\beta)\,dP$ integre edersek

$P_R = (1-\beta)P + sb$, $sb = 0$ dır, (yıldız yüzeyinde basınç sıfırdır)

Bu nedenle

$\frac{P_R}{P} = 1-\beta$ ve $P = P_G + P_R$ olduğundan, $\frac{P_G}{P} = \beta$ olur.

Eğer EDDINGTON'un varsayımını yani $\chi \overline{\varepsilon(r)} = $ sbt. dikkate alarak denklemleri çözersek, nasıl bir sonuca ulaşırız. Şimdi bunu yanıtlamaya çalışalım;

$P_R = \frac{a}{3} T^4$ ve $P_G = \frac{k}{\mu m_H} \rho T$ ve $\frac{P_G}{P} = \beta$ idi.

O halde,

$P = \frac{P_G}{\beta} = \frac{k}{\mu m_H \beta} \rho T$ olur, Buna (1) nolu denklem diyelim.

$\frac{P_R}{P} = 1-\beta$, $P_R = \frac{a}{3} T^4$ olduğundan $P = \frac{a T^4}{3(1-\beta)}$ -- (2) olur,

(1) ve (2) den R→11

$$\frac{aT^4}{3(1-\beta)} = \frac{k}{\mu m_H \beta}\rho T \quad \text{dan}$$

$T = \left(\frac{3k(1-\beta)\rho}{\mu m_H \beta a}\right)^{1/3}$ olur. Bunu $P = \frac{k}{\mu m_H \beta}\rho T$ de yerine koyalım.

$P = \frac{k}{\mu m_H \beta}\rho\left[\frac{3(1-\beta)k\rho}{\mu m_H \beta a}\right]^{1/3}$ şimdi düzenleyelim.

$$P = \left[\left(\frac{k}{\mu m_H}\right)^4 \cdot \frac{3(1-\beta)}{a\beta^4}\right]^{1/3} \cdot \rho^{4/3}$$

Eddington varsayımına göre [ ] içindeki hareey sabit olduğun-dan, bu değere K dersek,

$P = K \cdot \rho^{4/3}$ olur. Adyabatik dengede $P = K \cdot \rho^{\gamma}$ dan

$\gamma = \frac{4}{3}$ elde edilir. Bu değerde bizi Emden denklemine götürür. Emden denklemi,

$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) + y^n = 0$ idi, ve Politropik indeks'de

$\frac{1}{\gamma-1} = n$ olduğundan konvektif denge halindeki bir yıldızda $\gamma = \frac{5}{3}$ yani $\left(\frac{1}{\gamma-1} = n\right)$ dan $n = \frac{3}{2}$ idi.

Eddington varsayımında ise $\gamma = \frac{4}{3}$ bulmuştuk. Bu da bir politropik indeks olduğundan,

ARA BİLGİ; $\gamma - 1 = \frac{1}{n} \rightarrow \gamma = \frac{n+1}{n} \rightarrow P = K\rho^{\frac{n+1}{n}}$ olduğundan, R-312

Eddington varsayımına göre bulduğumuz radyatif denge halindeki yıldız modelinde,

$\gamma = \frac{4}{3} \rightarrow n=3$, Emden denkleminde $n=3$ haline tekabül eden çözüm kullanılacaktır.

Eddington varsayımının temin ettiği avantaj şudur; Evvelce bilinen çözümleri kullanma imkanı sağlar.

Bu nedenle $n=3$ için hesap edilen radyatif denge modeline, EDDINGTON MODELİ veya STANDART MODEL denir.

EMDEN DENKLEMİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

Emden Denklemi

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)+y^n=0 \quad \text{ya da} \quad \frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)=-x^2y^n \text{ idi.}$$

Son denklemin sol tarafının türevini alalım,

$$2x\frac{dy}{dx}+x^2\frac{d^2y}{dx^2}=-x^2y^n$$

olur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+y^n=0$$

elde edilir. Bu denklemin

$n=0$, $n=1$ ve $n=5$ için çözümü mümkündür.

Hatırlatma; $r=\alpha x$ ve $dr=\alpha dx$ idi.

$n=5$ durumunda x'in sonsuz büyük değerinde $y=0$ dur. Çünkü $x\rightarrow\infty \Rightarrow r=\infty$ gider. Yoğunluk yıldızın merkezinden sonsuz uzaklıkta sıfır olur. (Çünkü $r=0\rightarrow y=1$ ve $r=R\rightarrow y=0$ idi). Bu da sonsuz yarıçapta bir yıldız demektir.

R→13

$n=0$ için Emden denkleminin çözümü

$y^n = y^0 = 1$ olduğundan,

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)+1=0 \quad \text{ve} \quad d\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)=-x^2dx$$

$$x^2\frac{dy}{dx}=-\frac{x^3}{3}+c_1$$ olur. dy'yi denklemde yalnız bırakırsak

$$dy=-\frac{x\,dx}{3}+c_1\frac{dx}{x^2}$$

$$\boxed{y=-\frac{x^2}{6}-\frac{c_1}{x}+c_2}$$ Bu genel çözümdür.

Şimdi şartları inceleyelim.

$r=0$ ise $x=0$ ve $y=1$ olduğundan, $\frac{c_1}{0}=\infty$ olur. Ancak denklemin $y=1$ şartını sağlaması gerektiğinden $\boxed{c_1=0}$ dır.

$y=-\frac{x^2}{6}+c_2$ olur. Yine $y=1$ olması için $c_2=1$ olması gerekir. Bu denklem, Buna göre denklemin son hali $y=1-\frac{x^2}{6}$ olur.

yıldızın merkezdeki koşullara uyan özel bir çözümdür.

$r=\alpha x$ idi. Bu durumda $R=\alpha x_1$ olur. Yani, x_1 bilinirse, α bulunabilir. (Burada x_1 yıldızın yüzeyindeki değerdir).

Biliyoruz ki $\rho=\rho_c y^n$ idi ve yıldızın yüzeyinde $y=0$ idi.

O halde,

$y=1-\frac{x^2}{6}$ denkleminde değerleri yerine yazarsak,

$$0=1-\frac{x_1^2}{6} \Rightarrow x_1^2=6 \quad \text{ve} \quad x_1=\sqrt{6}$$ bulunur ve α hesaplanabilir.

n=1 için çözüm

R→174

Emden denklemini yazalım,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+y=0$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+xy=0$$ Bu denklemde $x\cdot y=z$ diyelim.

ve dönüşüm yapalım,

$dx\cdot y+dy\cdot x=dz$ den $\frac{dz}{dx}=y+x\frac{dy}{dx}$ olur. Turevini alırsak,

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}+x\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}$$ olur, ve

Emden denklemi şu hale dönüşür.

$$\boxed{\frac{d^2z}{dx^2}+z=0}$$

Bu denklem, sabit katsayılı ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir.

ARABİLGİ; sabit katsayılı ikinci mertebeden diferansiyel denklem çözümü;

$\frac{d^2z}{dx^2}+z=0$ denkleminin çözümü;

$ay''+by'+cy=0$

$a\lambda^2+b\lambda+c=0$ (karakteristik denklem)

Çözüm takımı;

1) $b^2-4ac>0$ için 2 reel kök, λ_1,λ_2; $y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$
bu genel çözümdür.

2) $b^2-4ac=0$ için çift kök. λ; $y=e^{\lambda x}(c_1+c_2\cdot x)$

3) $b^2-4ac<0$ iki sanal kök. $\lambda_1=\alpha+i\beta$; $y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$
$\lambda_2=\alpha-i\beta$

Şimdi tekrar Emden denklemine dönelim R-15.

$\dfrac{d^2 z}{dx^2} + z = 0$ bu denklemin karakteristik denklemi

$\lambda^2 + 1 = 0$ dır. $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

$b^2 - 4ac = 0^2 - 4.1 = -4 < 0$ iki sanal kök vardır.

$\lambda = \mp i$ $\left(\alpha = 0 \text{ ve } \beta = 1 \text{ dir.}\right)$

Genel çözüm;

$z = e^{0.x}\left(C_1 \cos 1.x + C_2 \sin 1.x\right)$

$z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ dır. $z = x.y$ olduğundan.

$xy = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ ve $y = C_1 \dfrac{\cos x}{x} + C_2 \dfrac{\sin x}{x}$ olarak bulunur.

$x = 0$ için $y = 1$ olduğundan $C_1 = 0$ olur. (ilk terim sonsuz büyük değil)

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \longrightarrow C_2 = 1$ olur. Sonuç olarak, en son elde edilen çözüm denklemi $y = \dfrac{\sin x}{x}$ dir. Şimdi bu denklemi sartlara göre modelleyelim.

Yıldız yüzeyinde $y = 0$ dır. $x = x_1$ olsun. Bu durumda.

$0 = \dfrac{\sin x_1}{x_1} \Longrightarrow \sin x_1 = 0 \Longrightarrow x_1 = \pi$ olur. Diğer taraftan

$r = \alpha x$ ve $R = \alpha x_1$ idi. Bu durumda $\alpha = \dfrac{R}{\pi}$ bulunur.

Böylece α hesaplanabilir.

Emden denklemi ÖZET R→16

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)+x^2y^n=0 \qquad \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)+y^n=0$$

$\frac{1}{\gamma-1}=n$ politropik indeks

$\gamma=\frac{n+1}{n}$

Tanımlanan değişkenler; $\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{\gamma-1}=y$, $\rho=\rho_c y^{\frac{1}{\gamma-1}}$, $\rho=\rho_c y^n$

$P=K\rho^\gamma$, $\frac{d\rho^{\gamma-1}}{dr}=(\gamma-1)\rho^{\gamma-2}\cdot\frac{d\rho}{dr}$

$r=\alpha x$

$dr=\alpha dx$

$n=5$ için $\gamma=\frac{6}{5}$, $x=\infty \rightarrow y=0$ dolayısıyla $r=\infty$

Sonsuz yarıçaplı bir yıldız.

$n=0$ için $\gamma=1$ olur. Emden denklemi $y=1-\frac{x^2}{6}$ olur.

$r=0$ için $x=0$ ve $y=1$ (Merkezi şartlar)

$r=R$ için $x=x_1$ ve $y=0$ (Yüzey şartları) burada $x_1=\sqrt{6}$ ve α hesaplanabilir,

$$\alpha=\frac{R}{\sqrt{6}}$$

$n=1$ için Emden denklemi $y=\frac{\sin x}{x}$

Bilegi $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ dir.

~~için~~ $r=0$ için $x=0$ ve $y=1$ (merkezi şartları)

$r=R$ için $x=x_1$, $\sin x_1=0$, $y=0$ ve $x_1=\pi$ ve α hesaplanabilir

$\alpha=\frac{R}{\pi}$ dir

n'nin diğer değerleri için sayısal çözüme gidilir,