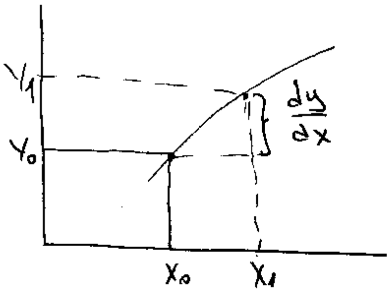
DERS: 7 S→1

= Emden denkleminde $n=0, 1, 5$ durumundaki sayısal çözümler =



Not: Türev değerin eğimidir.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f(x_0,y_0)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} = f(x_1,y_1)$$

x_0 dan sonra x_1 için bu noktadaki eğim elde edilir, x_n de eğri eğime eğrinin değerleri arka arkaya alınarak, kesikli bir eğri elde edilir. Bu tür işlemler için mutlaka bir BAŞLANGIÇ NOKTASI bilinmelidir. Biliyoruz ki,

$x_0=0$ için $y_0=1$ dir. Acaba $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = ?$ nedir.

Emden denkleminde $x=0$ için acaba $\frac{dy}{dx}$ ın değeri nedir?

Emden denkleminde $x=0$ için $\frac{dy}{dx}=0$ dır.

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2}$$ düzenlenerek

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}$$ bu bağıntıda $\frac{dP}{dr}$ nin $\frac{dy}{dx}$ ile orantılı olduğu gözönüne alınırsa, yıldızın merkezinde $\frac{dy}{dx}=0$ olduğu görülür.

$$P = K\rho^{\gamma}$$

$$\frac{dP}{dr} = \gamma K \rho^{\gamma-1}\frac{d\rho}{dr}$$

S→2

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = k\gamma \rho^{\gamma-2}\frac{d\rho}{dr}$$

$\frac{d}{dr}\rho^{\gamma-1} = (\gamma-1)\rho^{\gamma-2}\frac{d\rho}{dr}$ olduğundan, bunu düzenlersek,

$\frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{d\rho^{\gamma-1}}{dr} = \rho^{\gamma-2}\frac{d\rho}{dr}$ olur, → $\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = \frac{k\gamma}{\gamma-1}\frac{d\rho^{\gamma-1}}{dr}$

$\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{\gamma-1} = y$ olduğundan $\boxed{\rho^{\gamma-1} = \rho_c^{\gamma-1}\cdot y}$ dır, yada, $\boxed{\rho = \rho_c y^n}$ dir.

$\frac{d}{dr}\rho^{\gamma-1} = \frac{1}{dr}(\rho_c^{\gamma-1}\cdot y)$ dır, $r = \alpha x$ olduğundan $dr = \alpha dx$

$\cancel{\frac{d}{\alpha dx}\rho^{\gamma-1} = \rho_c^{\gamma-1}\frac{dy}{dx}}$ $\qquad \frac{d\rho^{\gamma-1}}{dr} = \frac{\rho_c^{\gamma-1}dy}{\alpha dx}$

$\cancel{\frac{d}{dx}\rho^{\gamma-1} = \frac{d}{dx}\rho^{\gamma-1}, y}$

$\frac{1}{P}\frac{dP}{dr} = \frac{\gamma k}{\gamma-1}\frac{d\rho^{\gamma-1}}{dr} = \left(\frac{\gamma k}{\gamma-1}\frac{\rho_c^{\gamma-1}}{\alpha}\right)\frac{dy}{dx}$ bu bağıntıdan

görülüyorki, $\frac{1}{P}\frac{dP}{dr} \propto \frac{dy}{dx}$ dir. Yani bir taraf sıfır olduğunda

diğer tarafta sıfır olur, Yani

$$\frac{dy}{dx} \propto \frac{d\rho^{\gamma-1}}{dx} \propto \frac{d\rho^{\gamma-1}}{dr} \propto \frac{1}{P}\frac{dP}{dr} \text{ dir,}$$

$\left.\begin{array}{l} r=0 \\ x=0 \end{array}\right\}$ yıldızın merkezinde → $\lim\limits_{\substack{r\to 0\\ x\to 0}} \frac{Gm(r)}{\cancel{dr}} = \frac{G\,dm(r)}{2r\,dr} = \frac{G4\pi\rho r^2 dr}{2r\,dr} = 2\pi G\rho_c r \to 0$ $\quad x\to 0$, $r=0$

$$\frac{Gm(r)}{r2}$$

$S \to 3$

Sonuç olarak $\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}$ de sıfıra gider.

Şimdi n değerleri için çözüme gidelim. Önce yıldızın içinde konvektif denge olduğunu varsayalım.

$\frac{1}{\gamma-1}=n$ dan $\gamma=\frac{5}{3}$ için $n=1,5$ bulunur. Ancak 1,5 ve 3 değerleri için analitik çözüm olmadığından sayısal çözüme gidilir.

Başlangıç şartlarımız: $x=0$, $y=1$, $\frac{dy}{dx}=0$ dır.

Fonksiyonumuz $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ şeklindedir. Bu fonksiyonu farklı bir tarzda ifade etmeye çalışalım. Elimizdeki fonksiyon $y=f(x)$ olsun. Bu fonksiyonu belirli bir x_0 noktası civarında Taylor serisine açalım, yani

$$y=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)+\dots$$

Diğer taraftan Mc Lauren açılımı ise $(x_0=0)$ noktası için

$$y=f(0)+x\,f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\dots$$

Terim sayısı ne kadar fazla ise hata oranı o nispette azalır. Ayrıca $(x-x_0)$ değerinin oldukça küçük olmasına dikkat etmeliyiz. $|x-x_0|<1$ olmursa, hata istenilen ölçüde küçültülmüş olur.

Şimdi BELIRSIZ KATSAYILAR YÖNTEMİNİ kullanalım.

İlk açılım noktası, $x=x_0$ alınacak (Mc Lauren), daha sonraki adımlarda Taylor açılımına geçilecek. Şimdi emden denklemini yazalım.

S→4

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)+y^n=0$$

$y=a+bx+cx^2+dx^3+\ldots$ McLauren açılımı olduğundan ve denklemlerde x yerine $-y$ konulduğunda denklem değişmediğinden, çözümün y nin bir çift fonksiyonu olması gerekir. Yani $y=A+Bx^2+Cx^4+\ldots$ şeklinde bir açılıma sahip olacağız. Bizim için sadece x in pozitif değerleri önemlidir. Çünkü $r=\alpha x$ için daima $r>0$, $\alpha>0$ dır. O halde $x>0$ olmak zorundadır.

Ayrıca $x=0$ için $y=1$ olduğunu da biliyoruz. Elde edeceğimiz eğri, artan ya da azalan olabilir. Ancak biz bunun devamlı azalan olduğunu kabul edeceğiz.

NOT; Türev (−) ise fonksiyon azalan, + ise artan fonksiyondur.

$d\left(x^2\dfrac{dy}{dx}\right)=-y^n x^2 dx$ olan Emden denklemimizi bir defa integre edelim.

$x^2\dfrac{dy}{dx}=-\displaystyle\int_0^x y^n x^2 dx$ olur. Bunu x^2 ile bölelim.

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x y^n x^2 dx$ bu da <0 dır.

Şimdi Emden Denklemini açalım;

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx}+y^n=0$ ve

$y=A+Bx^2+Cx^4+$ idi. Şimdi türevleri hesaplayalım.

$S \to 5$

$$\frac{dy}{dx} = 2Bx + 4Cx^3 + \dots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2B + 12Cx^2 + \dots$$

Şimdi bunları denklemde yerine koyalım,

$$2B + 12Cx^2 + \dots \frac{2}{x}(2Bx + 4Cx^3 + \dots) + \dots + (A + Bx^2 + Cx^4 + \dots)^n \equiv 0 \text{ dır}$$

Düzenlersek,

$$2B + 12Cx^2 + \dots + 4B + 8Cx^2 + \dots + (A + Bx^2 + Cx^4 + \dots)^n \equiv 0 \text{ olur.}$$

$x = 0$ ve $y = 1$ için $A = 1$ dir.

$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} \cdot b + \dots$ ve bununa açılımı $1 + nBx^2 + \dots$ şeklinde olur. O halde şimdi, denklemimizdeki sabitlere ve x^2 li terimlere bakalım;

$(6B+1) + (12C + 8C + nB)x^2 + \dots$ gerisine gerek yok, bunlar yeterli.

$$\left.\begin{array}{l} 6B+1=0 \\ 20C+nB=0 \end{array}\right\}$$ çünkü, bütün terimler sıfırdır (eşitlik ve x tan dolayı)

O halde, bu iki denklemden B ve C tayin edilebilir.

Sonuçta, $B = \frac{1}{6}$ ve $C = \frac{n}{120}$ dir.

O halde açılımımızı yazabiliriz: $y = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{n}{120}x^4$

Bu bağıntı bize şunu hatırlatıyor. Eğer $n=0$ yazarsak,

$y = 1 - \frac{x^2}{6}$ olarak buluruz. (Not; Bu çıkarılış daha önceden gösterildi)

$n=1$ için yazarsak,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

yani $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $S \to 6$

$$y = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$$ bu da daha önceden gösterilmişti,

Sonuç olarak, denklemimiz tüm n değerleri için geçerlidir. O halde bizim için önemli olan konvektif dengeye sonlu için $n=1{,}5$ için $(n=\frac{3}{2})$ ~~çözümümüzü~~ açılımımızı yazalım;

$$\frac{1{,}5 \cdot 3}{120 \cdot 2}$$

$$y = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{80}$$ olur.

$x=0.1$ için $x^2 = 0.01$, $\frac{x^2}{6} = 0{,}00167$, $x^4 = 0{,}0001$, $\frac{x^4}{80} = 0{,}0000012$

$$y = 1 - 0{,}00167 + 0{,}0000012 = 0.99833$$

Toplu sonuç olarak yazarsak,

$n = \frac{3}{2} = 1.5$ için tablo

x	y
0.1	0.99833
0.2	0.99335
0.3	0.98510
0.4	0.97365
0.5	0.95911
⋮	

$x_1 = 0{,}5$ den sonraki değerler için Taylor açılımı yapılır.

$x_1 = 0.5$ ve $y_1 = 0.95911$ değerlerine göre Taylor açılımını yazarsak,

$$y = y_1 + (x - x_1)\, y_1' + \frac{(x-x_1)^2}{2!} y_1'' + \cdots$$

$$y = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{80}$$ buradan y' ve y'' değerlerini bulalım.

$$y' = -\frac{x}{3} + \frac{1}{20}x^3 + \cdots \quad \text{ve} \quad y'' = -\frac{1}{3} + \frac{3}{20}x^2 + \cdots$$

Sonra da $y=0$ olana kadar x değerlerini elde edelim.

Ancak n için anlamlı olanlara göre çözüme gideceğiz.. S→7

$\gamma = \frac{5}{3} \rightarrow n = \frac{3}{2} = 1,5$ konvektif denge halinde ve

$\gamma = \frac{4}{3} \rightarrow n = 3$ radyatif denge halinde.

O halde n=1,5 ve n=3 için Emden denkleminin sayısal olarak çözebiliriz.

$n = \frac{3}{2} = 1,5$ çözümü

X	y
0.0	1,000
0.5	0,959
1.0	0.845
1.5	0.681
2.0	0.496
2.5	0.316
3.0	0.159
3.5	0.033
3.6	0.011
$X_1 = 3.6538$	0.00000

n=3 çözümü (Eddington modeli)

X	Y
0.00	1.000
0.5	0.960
1.0	0.855
1.5	0.720
2.0	0.583
2.5	0.461
3.0	0.359
3.5	0.276
4.0	0.209
4.5	0.155
5.0	0.111
6.0	0.044
$X_1 = 6.9011$	0.00000

Burada y=0 yapan x değeri x_1 dir.

S→8

Sonuç olarak,

$r = \alpha x$ ve $R = \alpha x_1$ idi Bundan $\alpha = \frac{R}{x_1}$

Yıldızın iç yapısının çözümü için, n=1,5 ve n=3 değerleri için yıldızın parametreleri biliniyorsa, farklı r değerleri için bir çözüm bulunur ve yıldızın diğer parametreleri hesaplanabilir. Bunu bir örnekle gösterelim.

PROBLEM; Yıldızın M, R ve $n=\frac{3}{2}$ (konvektif denge hali) biliniyorsa, acaba farklı r değerlerinde P, ρ ve T ne olur?

Çözüm yöntemi $x \to y$ gidilerek çözülecek.

$r = \alpha x$
$r = \left(\frac{R}{x_1}\right)x$ } Buna göre tablomuzda her r için bir x değeri ve ona göre de bir y değeri vardır.

Şimdi çözüme geçelim.

$$\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{\gamma-1} = y \to \frac{\rho}{\rho_c} = y^{1/\gamma-1} = y^n \to \rho = \rho_c\, y^n \text{ olur.}$$

Eğer ρ_c değerini M ve R cinsinden çözersek, yoğunluk problemi farklı r değerleri için çözüme kavuşur.

$dm(r) = 4\pi \rho r^2 dr$ idi. (Küresel simetri durumu) Bunu merkezden yüzeye kadar integre edelim.

$$\int_0^R dm(r) = \int_0^R 4\pi \rho r^2 dr$$

, Burada r, ρ ve dr değerlerinin eşitliklerini yazalım. [$r = \alpha x$, $dr = \alpha dx$, $\rho = \rho_c y^n$

$$M = 4\pi \int_0^{x_1} \rho_c\, y^n \alpha^2 x^2 \alpha\, dx$$

$$M = 4\pi \rho_c \alpha^3 \int_0^{x_1} y^n x^2 dx \text{ olur.}$$

S→9

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)+y^n=0$$ (Emden Denklemi), düzenlersek

$$y^n x^2 dx = -d\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)$$

$$M=-4\pi\alpha^3\rho_c\int_0^{x_1} d\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)$$

$$M=+4\pi\alpha^3\rho_c\left[x_1^2\left(-\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}\right]$$

$$\rho_c=\frac{M}{4\pi\alpha^3 x_1^2\left(-\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}}$$ buradan ρ_c hesaplanabilir.

$\rho=\rho_c y^n$ idi.

$\alpha=\frac{R}{x_1}$ idi. Bu da yerine konursa.

$$\rho_c=\boxed{\frac{x_1}{4\pi\left(-\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}}}\frac{M}{R^3}$$

Burada $\boxed{}$ ifadesi, bu modelde bütün yıldızlar için aynıdır.

Özetlersek;

$r=\alpha x=\frac{R}{x_1}x \rightarrow x=\left(\frac{x_1}{R}\right)r \rightarrow$ verilen r için x bulunur.

Emden tablosunda x e karşılık gelen y bulunur, ve ρ_c hesaplanır.

$\rho=\rho_c y^n$ den istenilen ρ bulunur.

Bunlar P ve T için de yapılabilir.