DERS; 8 $\quad$ TP $\rightarrow$ 1

Yoğunluk için $\rho = \rho_c y^n$ ve

$$\rho_c = \boxed{\frac{x_1 M}{4\pi\left(-\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} R^3}}$$

bağıntılarını bulmuştuk.

Şimdi aynı işlemleri P ve T için de yapalım.

$P = K.\rho^{\gamma}$ idi ve $\gamma = \frac{5}{3}$

$\gamma - 1 = \frac{1}{n}$, $\gamma = \frac{n+1}{n}$ idi. O halde $P = K.\rho^{\frac{n+1}{n}}$ dir.

Eğer K sabitini bulabilirsek, P yi hesaplayabiliriz.

$\rho = \rho_c y^n$

$\rho^{\frac{n+1}{n}} = \rho_c^{\frac{n+1}{n}} . y^{n+1} \Rightarrow P = K.\rho_c^{\frac{n+1}{n}} . y^{n+1}$ dir. Yıldız merkezinde

$y=1$ olduğundan $K.\rho_c^{\frac{n+1}{n}} = P_c$ (Merkezi) basınçtır, ve

$P = P_c . y^{n+1}$ dir. ρ_c değerini daha önce bulmuştuk, Eğer K sabitini hesaplayabilirsek, merkezi basıncı da bulabiliriz.

Emden denklemi çözümünde,

$$\frac{\gamma K \rho_c^{\gamma-2}}{4\pi G(\gamma-1)\alpha^2} = 1$$ olarak almıştık. Burada $\alpha = \frac{R}{x_1}$,

$\gamma = \frac{n+1}{n} \rightarrow \gamma - 1 = \frac{1}{n} \rightarrow \gamma - 2 = \frac{1-n}{n}$, $\frac{\gamma}{\gamma-1} = n+1$ dir. Bunları

denklemde yerine koyalım.

$$\frac{(n+1)K \rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G \frac{R^2}{x_1^2}} = 1$$ dir. K yı denklemden çekelim.

$$K = \frac{4\pi G R^2}{(n+1)\, x_1^2}\, \rho_c^{\frac{n-1}{n}}$$ bulunur. TP→2

$P_c = K\rho^{\frac{n+1}{n}}$ de K değerini yerine koyalım;

Ara not; $\rho_c^{\frac{n-1}{n}} \cdot \rho_c^{\frac{n+1}{n}} = \rho_c^2$ dir.

$$P_c = \frac{4\pi G R^2}{(n+1)\, x_1^2}\, \rho_c^2 \quad \text{ve} \quad P_c = \frac{4\pi G R^2}{(n+1)\, x_1^2}\, \frac{x_1^2 M^2}{(4\pi)^2 \left(-\frac{dy}{dx}\right)^2_{x=x_1} \cdot R^6}$$

Sadeleştirmelerden sonra,

$$\boxed{P_c = \frac{G\, M^2}{4\pi (n+1) \left(-\frac{dy}{dx}\right)^2_{x=x_1} R^4}}$$

Bu model için tüm yıldızlar için aynıdır. O halde,

$P = P_c \cdot y^{n+1}$ bağıntısından, her r değeri için basınç bulunabilir. Şimdi aynı işlemleri T sıcaklığı için yapalım

$$P = \frac{k}{\mu m_H}\rho T \rightarrow T = \frac{\mu m_H}{k}\frac{P}{\rho}$$ bu denklemde bulduğumuz, P ve ρ değerlerini yerine yazarsak, yani

$P = P_c\, y^{n+1}$ ve $\rho = \rho_c\, y^n$ ve sonuç alırız,

$$T = \frac{\mu m_H}{k}\, \frac{P_c\, y^{n+1}}{\rho_c\, y^n}$$

$$T = \frac{\mu m_H}{k}\, \frac{P_c}{\rho_c}\, y$$ bulunur. Merkezde $y=1$ olduğundan,

$$T_c = \frac{\mu m_H}{k}\, \frac{P_c}{\rho_c}$$ ve sonuçta $\boxed{T = T_c \cdot y}$ bulunur.

Şimdi tüm sabitleri yerlerine yazalım.

TP → 3

$$T_c = \frac{\mu m_H G \cancel{M}^{2} M^2 4\pi \left(-\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} R^3}{k\, 4\pi (n+1) \left(-\frac{dy}{dx}\right)^2_{x=1} R^4 x_1 M}$$

$$T_c = \boxed{\frac{m_H G \mu M}{(n+1) k x_1 \left(-\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} R}}$$ bulunur.

Şimdi elde ettiğimiz çözümleri bir araya toplayalım.

$$\left.\begin{aligned} dm(r) &= 4\pi \rho r^2 dr \\ dP &= -\frac{G m(r) \rho\, dr}{r^2} \\ P &= K\rho^{\gamma} = K\rho^{\frac{n+1}{n}} \end{aligned}\right\} \text{den} \quad \begin{aligned} \rho &= \rho_c y^n \\ P &= P_c y^{n+1} \\ T &= T_c y \end{aligned}$$

$$\rho_c = \frac{x_1 M}{4\pi \left(-\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} R^3}$$

$$P_c = \frac{G M^2}{4\pi (n+1) \left(-\frac{dy}{dx}\right)^2_{x=x_1} R^4}$$

$$T_c = \frac{\mu m_H G M}{(n+1) k x_1 \left(-\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} R}$$ ve

$n = \frac{3}{2}$ (konvektif bölge) ve $n = 3$ (radyatif bölge) içindir.

Ayrıca, $P = K\rho^{\frac{n+1}{n}}$ de merkezi değerler için

$P_c = K\rho_c^{\frac{n+1}{n}}$ ve K için ise, TP → 4

$$K = \frac{(4\pi)^{1/n} G\, R^{\frac{3-n}{n}} \left(-\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}^{\frac{1-n}{n}}}{(n+1)\, x_1^{\frac{1+n}{n}} \cdot M^{\frac{1-n}{n}}}$$

Radyatif denge halindeki anakol yıldızlarını dikkate alırsak, $R^{\frac{3-n}{n}}$ de $n=3$ için $R^{0}=1$ olur. Bu da K sabitinin sadece kütleye ve model için öne sürülen kabullere bağlıdır.

Arabilgi = Daha önceden şu bağıntıları radyatif denge şartları için bulmuştuk.

$$P_R = \frac{a}{3}T^4, \quad \frac{P_G}{P} = \beta, \quad \frac{P_R}{P} = 1-\beta, \quad P = \frac{P_R}{1-\beta}, \quad P = \frac{aT^4}{3(1-\beta)}$$

Bu bağıntılara göre

$$P = \left[\left(\frac{k}{\mu m_H}\right)^{4/3} \frac{3(1-\beta)}{a\beta^4} \right]^{1/3} \rho^{4/3}$$ idi.

$P^{\gamma} = \rho^{\frac{n+1}{n}}$ olduğundan $\gamma = \frac{4}{3}$ olduğunu biliyoruz.

Eddington modeline göre [ ] içi K sabitine eşit olmalıdır.

yani

$$\frac{(4\pi)^{1/3} G \left(-\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}^{-2/3} M^{2/3}}{4\, x_1^{4/3}} = \left[\left(\frac{k}{\mu m_H}\right)^{4/3} \frac{3(1-\beta)}{a\beta^4} \right]^{1/3}$$

Bulduğumuz tabloda $n=\frac{3}{2}$ için (konvektif denge içindir) $x_1 = 6.9011$ bulmuştuk. Buna göre

kontrol et, hatalı olabilir.

$$M^2 \propto \frac{1-\beta}{\beta^4}$$ orantılıdır.

yani TP → 5

$$\frac{(4\pi)\, G^3 \boxed{M^2}}{(4)^3 x_1^4 \left(-\frac{dy}{dx}\right)^2_{x=x_1}} = \left(\frac{k}{\mu m_H}\right)^{4/3} \frac{3}{a} \boxed{\frac{(1-\beta)}{\beta^4}}$$

Orandan şu sonucu çıkarabiliriz.

$\frac{1-\beta}{\beta^4} \propto M^2$ de M değeri büyüdükçe β küçülür.

$\frac{P_R}{P} = 1-\beta$ de ise $(1-\beta)$ nın büyümesi, radyasyon basıncının büyüdüğünü gösterir. Buradan da anlıyoruz ki radyasyon basıncı, büyük kütleli yıldızlarda daha fazla öneme sahiptir.

$M/M_\odot$	$1-\beta$
0.6	0.01
1.0	0.03
1.5	0.06
2.0	0.09
10	0.40
20	0.55
30	0.70

olur. Bir yıldızda, gaz basıncına nazaran, radyasyon basıncının çoğalması, yıldızda dengesizliğe yol açar. Biliyoruz ki yıldızlarda enerji iletimi ya konvektif yolla ya da radyatif yolla sağlanıyordu.

TP→6

Yeni oluşmuş yıldızlarda, O tipi yıldızların merkezi kısımlarında konvektif denge vardır. Ağır bazıdır yıldızların da en dış katmanlarına yakın bölgelerinde konvektif denge vardır. Yıldız kütlesinin tamamı radyatif denge halinde değildir, ancak büyük bir kısmı radyatif denge halindedir.

Bir yıldızın radyatif denge halinde olduğunu varsayarsak, bu denge ne kadar kararlıdır. Şimdi bunu gösterelim.

Adyabatik sıcaklık gradyenti, radyatif sıcaklık gradyentinden mutlak olarak büyükse radyatif denge vardır derler. Yani

$$\left|\frac{dT}{dr}\right|_{rad} < \left|\frac{dT}{dr}\right|_{\substack{ady \\ (konv)}} \quad \text{yada} \quad -\left(\frac{dT}{dr}\right)_{rad} < -\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ady}$$

Bir yıldızda hem radyatif hem de konvektif bölge olduğunda sayısal integrasyonda, hangisinin nerede başlayıp, nerede bittiği çok iyi bilinmelidir.

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho L(r)}{16\pi a r^2 c T^3} \quad \text{(radyatif sıcaklık gradyenti)}$$

$P = K\rho^{\gamma}$ → adyabatik denge halindeki gazın bağıntısı.

$P = \dfrac{k}{\mu m_H}\rho T$ → ideal gaz denklemi

Son iki bağıntıyı logaritmik olarak türetelim.

$$\frac{dP}{P} = \gamma\frac{d\rho}{\rho} \;\text{--(1)} \quad \text{ve} \quad \frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \;\text{--(2)} \quad \text{olurlar.}$$

2. denklemi γ ile çarpıp, 1.den çıkaralım

$$(\gamma-1)\frac{dP}{P}=\gamma\left(\frac{dT}{T}\right)_{ady}$$ TP→7

$$\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{T}{P}dP=dT$$ olur 1/dr ile bölelim

$$\boxed{\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{T}{P}\frac{dP}{dr}=\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ady}}$$

Topluolarak elde edilen denklemleri yazalım;

1) $$\frac{dm(r)}{dr}=4\pi\rho r^2$$

2) $$\frac{dP}{dr}=-\frac{GM(r)\rho}{r^2}$$

3) $$\frac{dL(r)}{dr}=4\pi\varepsilon\rho r^2$$

4)a Radyatif denge hali $$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{rady}=-\frac{3\chi\rho L(r)}{16\pi acr^2T^3}$$

b) Konvektif denge hali $$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ady}=\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{T}{P}\frac{dP}{dr}$$

1,2,3 denklemleri her yıldız modeli için kullanılır.
Bütün denklemlerde $\rho = \frac{\mu m_H}{k}\frac{P}{T}$ yazılabilir,

4. denklemlerden ise hangisinin mutlak değeri daha küçükse o denklem dikkate alınır. Her adımda (dr) sıcaklık gradyentleri karşılaştırılır.

Tamamen iyonlaşmış, ~~monoatomik~~ monoatomik gaz halindeki bölge için

$$-\left(\frac{dT}{dr}\right)_{rad}<-\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ady}$$ koşulundan da,

adyabatik gradyan yapılırsa, $\qquad TP \to 8$

$$-\left(\frac{dT}{dr}\right)_{rad} < \frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{T}{P}\left(-\frac{dP}{dr}\right)$$

$$\frac{\left(\frac{dT}{dr}\right)_{rad}}{\frac{T}{P}\left(\frac{dP}{dr}\right)} < \frac{\gamma-1}{\gamma}$$

$$\frac{\frac{1}{T}\left(\frac{dT}{dr}\right)_{rad}}{\frac{1}{P}\left(\frac{dP}{dr}\right)} < \frac{\gamma-1}{\gamma}$$

ve monoatomik gaz için $\gamma = \frac{5}{3}$ olduğundan,

$$\frac{d\log T}{d\log P} < 0.4$$

bulunur. Buna Schwarzschild kriterini denir. $d\log T/d\log P$ değeri 0.4'den küçük kaldığı sürece, ilgili bölge radyatif denge halindedir. Eğer gaz monoatomik değilse, bağıntı yine de geçerlidir. Ancak 0.4 değeri yerine ilgili ortam için $(\gamma-1)/\gamma$ kullanılır.

İç yapı denklemlerinden hareketle takip edilecek yol; TP-39

İntegrasyon için;

$r=0$ $M(r)=0$ $\qquad$ $r=R$'den $P=0$

$L(r)=0$ $\qquad$ $T=0$

P ? (P_c tahmin) $\qquad$ $M=?$

T ? (T_c tahmin) $\qquad$ $L=?$

Yıldız merkezinden başlayan integrasyonda P_c ve T_c tahmini olarak alınır, Her adımda, her bir değişkene göre 4 adet grafik çizilir. Yüzeyden başlayan integrasyonda M ve L değerleri tahmin edilir. Adım adım gidilerek, Merkezden gelen integrasyonla çakışması sağlanır, Eğer çakışmıyor ise, tahminlerden biri biraz değiştirilerek çakışma sağlanır.

Eğer 4 denklemin analitik çözümü mümkün olsaydı, $L(r), M(r), r, P, T$ arasında 4 tane bağıntı bulunurdu. Ayrıca 4 tane de integrasyon sabiti işin içine girerdi. yani (c_1, c_2, c_3, c_4) olurdu. Varsayılan 4 çözüm f_1, f_2, f_3, f_4 olsun. Hem merkez, hem de yüzey için denklemlerimiz:

$M(r) = f_1(r, c_1, c_2, c_3, c_4)$

$L(r) = f_2($ " $)$

$P = f_3($ " $)$

$T = f_4($ " $)$ olurdu. Bu denklemler yıldızın yüzeyi ve merkezi için yazılırsa, TP-10

Yüzey	Merkez için
$M = f_1(\ )$	$0 = f_1(\ )$
$L = f_2(\ )$	$0 = f_2(\ )$
$0 = f_3(\ )$	$P_c = f_3(\ )$
$0 = f_4(\ )$	$T_c = f_4(\ )$

olur. Sonuçta 8 denklemimiz olurdu. Halbuki bulmak istediğimiz parametreler 11 adettir. Bunlar;

$P_c, T_c, M, L, R, c_1, c_2, c_3, c_4, X, Y$ dir. $11-8=3$ parametre ise keyfi olarak seçilir. En mantıklı çözüm için seçilen en uygun parametreler (M, X, Y) dir. Bu şekilde diğer parametreler de bulunabilir.

TP→11

SORU;

Bir yıldızın yüzeyinde $M(r)=M$, $L(r)=L$ olduğunu kabul edelim. P ve T arasında nasıl bir bağıntı vardır.

Çözüm; Hidrostatik denge ve radyatif denge denklemleri kullanılacak.

$$\chi = \text{sabit}, \; M(r)=M \text{ ve } L(r)=L$$

Eğer sıcak bir yıldızsa $\chi = 0{,}2(1+X)$, daha soğuk yıldızlar içinde $\chi = \chi_0 \frac{\rho}{T^{3,5}}$ alınabilir.

$$dP = -\frac{GM(r)\rho dr}{r^2}$$

$$dT = -\frac{3\chi L(r)\rho dr}{16\pi a c r^2 T^3}$$ dır, $M(r)=M$ ve $L(r)=L$ olduğundan

son denklemler

$$dP = -\frac{GM\rho dr}{r^2} \longrightarrow \frac{\rho dr}{r^2} = -\frac{dP}{GM}$$

$$dT = -\frac{3\chi L\rho dr}{16\pi a c r^2 T^3} \longrightarrow \frac{\rho dr}{r^2} = -\frac{16\pi a c T^3 dT}{3\chi L}$$

$$+\frac{dP}{GM} = +\frac{16\pi a c T^3 dT}{3\chi L}$$

$$\frac{1}{GM}dP = \frac{16\pi a c}{3\chi L}T^3 dT$$

$$dP = \left(\frac{16\pi G M a c}{3\chi L}\right)T^3 dT$$

TP-312

$$P=\left(\frac{16\pi a M a c}{3\chi L}\right)\frac{T^4}{4}+C$$

C için tespit; yüzeyde $P=0$, $T=0$ olduğundan $C=0$ olur

$$P=\frac{4\pi}{3}\frac{a M a c}{\chi L}T^4$$

ayrıca $P=K\rho^{\gamma}$ Burada $\gamma=\frac{C_P}{C_V}=\frac{n+1}{n}$ olduğundan,

$$P=K\rho^{\frac{n+1}{n}}$$

$$P=\frac{k}{\mu m_H}\rho T \Rightarrow \rho=\frac{\mu m_H}{k}\frac{P}{T}$$ her iki tarafın $\frac{n+1}{n}$ kuvveti alınırsa,

$$\rho^{\frac{n+1}{n}}=\left(\frac{\mu m_H}{k}\right)^{\frac{n+1}{n}}\cdot\frac{P^{\frac{n+1}{n}}}{T^{\frac{n+1}{n}}} \Rightarrow \rho^{\frac{n+1}{n}}\propto\frac{P^{\frac{n+1}{n}}}{T^{\frac{n+1}{n}}}$$ olur,

sonuç olarak

$$P\propto\frac{P^{\frac{n+1}{n}}}{T^{\frac{n+1}{n}}} \Rightarrow P^{\frac{1}{n}}\propto T^{\frac{n+1}{n}}$$

ve $\boxed{P\propto T^{n+1}}$ orantılıdır.