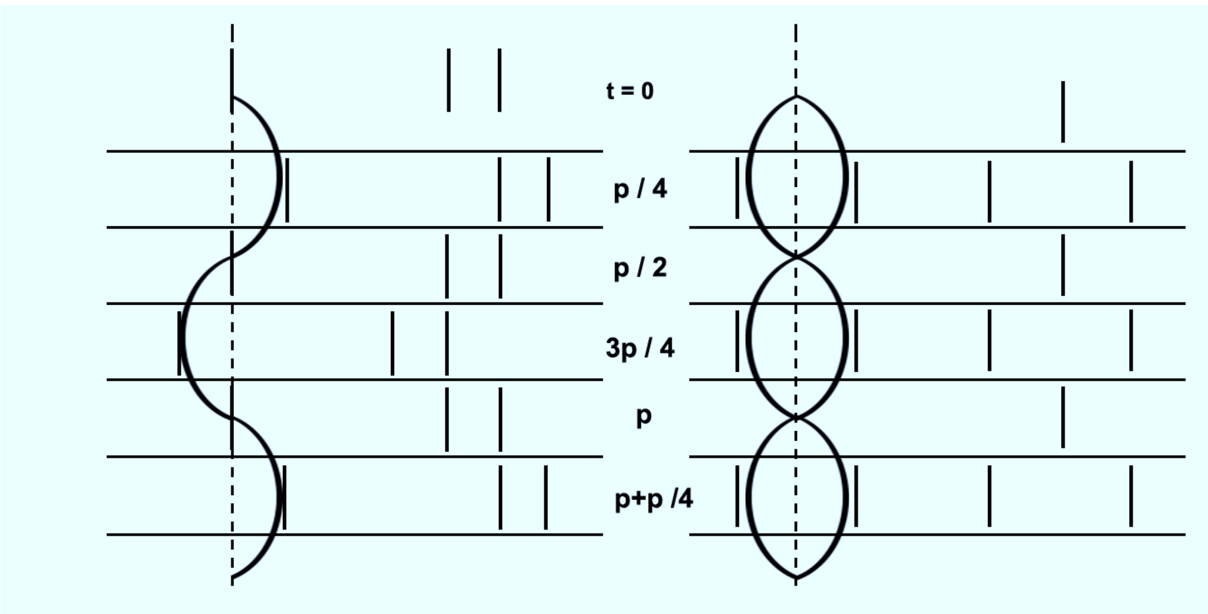
## 3- SPEKTROSKOPİK ÇİFT YILDIZLAR

Bu sınıfa giren bir çift yıldızın, dürbün ile bir çift yıldız halinde görülemeyecek kadar birbirine yakın iki üyesi vardır. Sistemin çift oluşu bu yıldızların spektrumlarındaki çizgilerin Doppler olayından dolayı periyodik olarak yer değiştirmesinden (yani radyal hızların değişmesi demektir) itibaren bulunur. Ancak bunların yörüngeleri bakış doğrultusuna dik olursa gözlenemezler (yani $i$ =0). Bu nedenle $i \neq 0$ olmalıdır.

Bir çift yıldız sisteminde her iki yıldızda kafi derecede parlak ise şekil-11'de görüldüğü gibi birbirine göre farklı yönde salınım yapan iki grup çizgi elde edilir. Peryodik olarak iki yıldızı birleştiren doğru görüş doğrultusuna dik olduğu zaman, yıldızlardan biri yaklaşırken diğeri uzaklaşır. Böylece yıldızlardan birine ait çizgiler, diğerinin çizgilerine göre iki yıldızın rölatif hızları ile orantılı bir miktar kadar yer değiştirir. Bir çeyrek peryot sonra iki yıldızı birleştiren doğru görüş doğrultusuna paralel olduğu zaman sadece bir grup çizgi gözlenir. Bu andan itibaren bir çeyrek peryot sonra iki grupta bulunan çizgiler tekrar fakat farklı yönde yer değiştirir. Eğer yıldızlardan biri diğerinden 1 kadir parlak ise sadece parlak yıldızın çizgileri görünebilir, ve bunlar spektrum üzerinde ortalama durumun etrafında ileri geri salınım hareketi yapar. Bu durumlar Şekil-11'de gösteriliyor.

Bütün yıldızların %20 – %25 'i büyük bir olasılıkla spektroskopik çift yıldızlardır. 9. kadire kadar 33000 spektroskopik çift yıldız sistemi olduğu tahmin ediliyor. Bu sistemlerin çoğunun periyodu 5 yıldan azdır. Bilinen en küçük periyotlu yıldız W Pup olup peryodu 1 saat 40 dakikadır. Büyük periyotlu spektroskopik çift yıldız olan φ Hydra'nın periyodu 15.3 yıldır. Bilinen spektroskopik çift yıldızların %56'sının periyodu 10 günden az ve %26'sınında 10 ile 100 gün arasındadır.




Tek çizgili spektroskopik sistemde yıldızın çizgilerinin değişimi. Çift çizgilispektroskopik sisteminiki bileşenine aitçizgilerin değişimi

Şekil-11

## 3- 1) Spektroskopik çift yıldızların hız eğrisi :

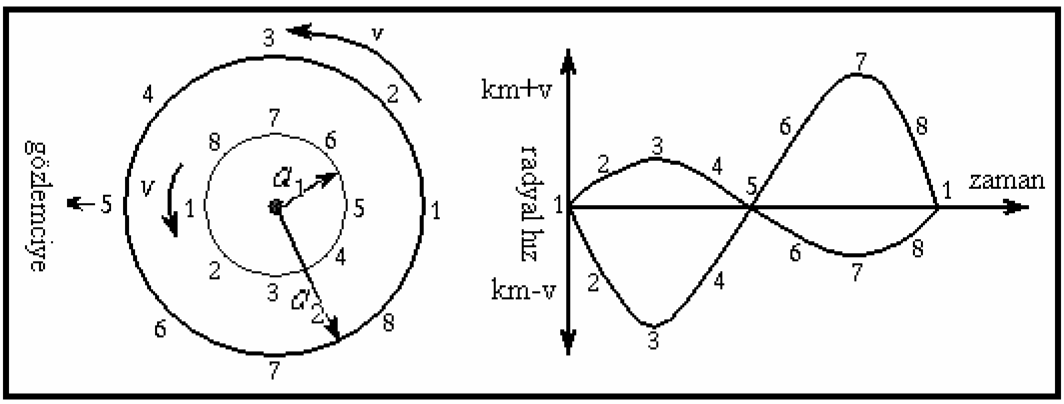
Bir spektroskopik çift yıldızın yörünge özelliklerini tayin etmeden önce bu yıldızın spektrumuna ait veriler yardımı ile hız eğrisi çizilir. Bu bir spektrel çizginin normal durumuna göre kayma miktarını ölçmekle ve yıldızın o andaki radyal hızını hesaplamakla yapılır. Yani

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c}$$

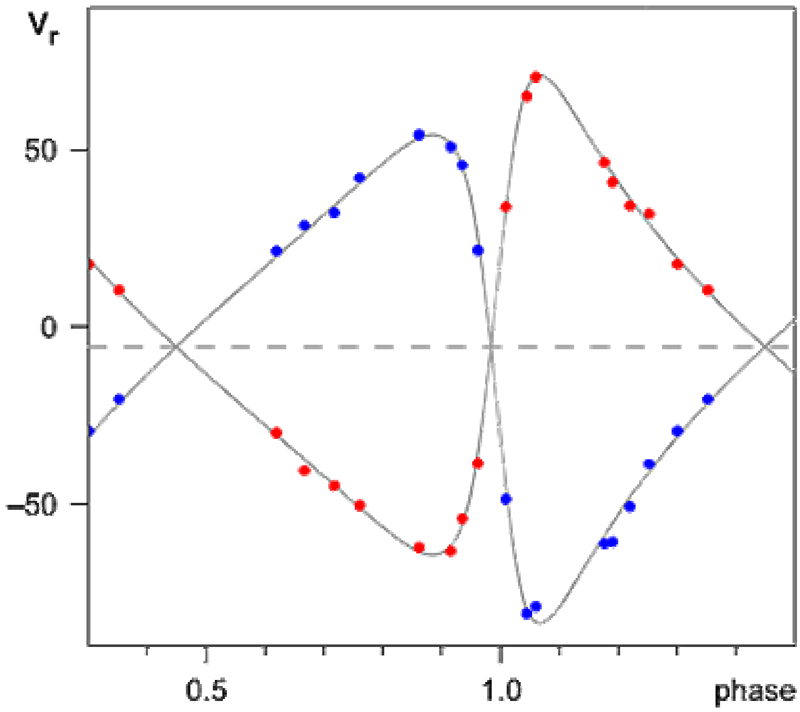
den $V_r$ bulunabilir. Bir tek devir esnasında spektrel çizgilerin değişmesiyle birçok radyal hız değeri elde edilir. Eğer bu değerleri (yani hızın) zamanın fonksiyonu olarak grafike edersek, o zaman HIZ EĞRİSİ dediğimiz eğriyi elde ederiz. Her iki bileşenin spektrumları gözlendiği taktirde aynı görüşte fakat zıt fazlı iki hız eğrisi elde edilir. Bu eğrilerin genlikleri farklıdır. Yıldızların kütleleri eşitse birbirinin aynı fakat zıt fazda eğriler olur. Yalnız bir yıldızın spektrel çizgileri görülebilirse, bir tek hız eğrisi vardır. Aşağıda Şekil–12 ‘de $i=90^o$ için 2 yıldıza ait iki hız eğrisi görüyoruz. İki eğri de sinüs eğrisi olup, p peryodu süresince kütle merkezi etrafında bir salınım yapar. Kütle merkezinin hızı sabittir. Burada basitlik açısından dairesel bir yörünge göze aldık. Diğer taraftan gerçek bir çift sistemin örneğin φ Ursae Majoris çift yıldızının hız eğrisi Şekil-13’de çizilmiştir.

Hız eğrilerinin şekilleri, eksentirisiteye ve büyük eksenlerinin görüş doğrultusuna göre farklı olur. Örnek olarak Şekil-14’de dört farklı yörünge ve bunlara karşılık gelen hız eğrileri görülmektedir.

Bu örneklerde 3 farklı eksentirisite seçilmiş ve iki durumda da aynı eksentirisite olmasına rağmen büyük eksenin görüş doğrultusuna göre yönlenmesi farklı olduğuna dikkat edilmelidir. Ayrıca hız eğrisi ile kütle merkezinin hareketini gösteren doğrunun kesim noktalarının, yıldız görüş doğrultusuna dik doğrultuda hareket ettiği anlarda yörünge üzerindeki noktaları temsil ettiğine ve bu sebepten bu doğrultunun radyal hız bileşeni bulunmadığına dikkat edilmelidir. Hız eğrisinde yukarıda bahsedilen doğrunun en alt ve en üst kısmında bulunan noktalar, sırasıyla, yıldızın en büyük yaklaşma ve en büyük uzaklaşma hızlarına sahip olduğu anlarda yörünge üzerinde bulunduğu noktalardır. Bu noktalar hakiki yörünge üzerinde görüş doğrultusuna dik olan ve düğümler doğrultusu adı verilen bir doğru tayin ederler. O halde düğüm noktalarında yıldızın radyal hızı maksimumdur. Yıldız düğüm noktalarından birinde bulunduğu

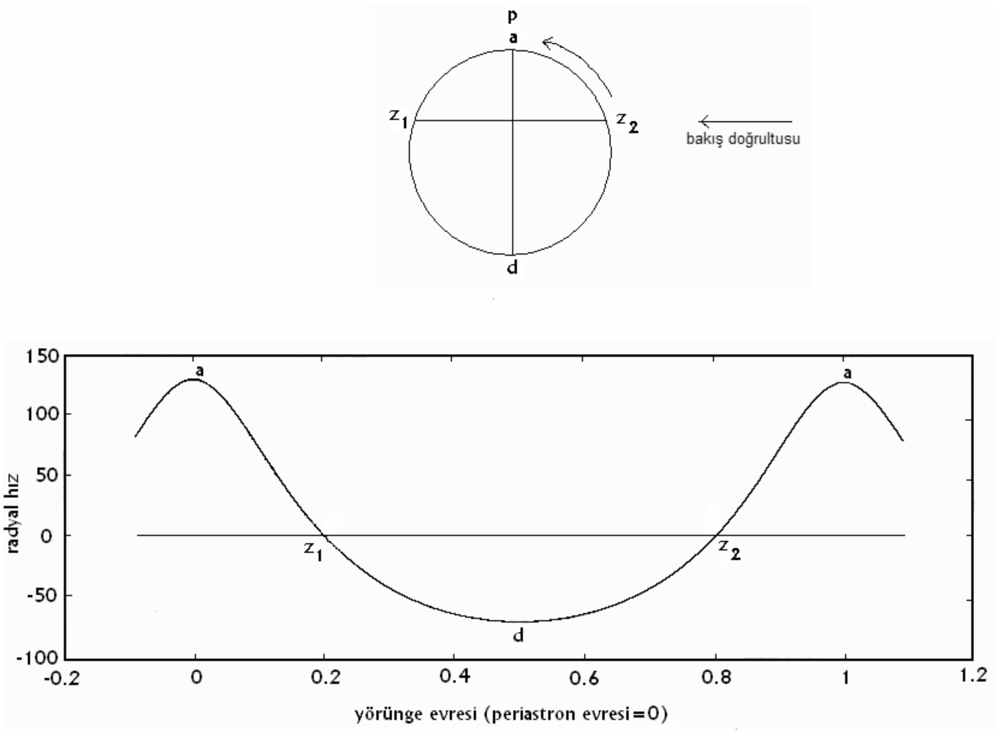



Şekil-12

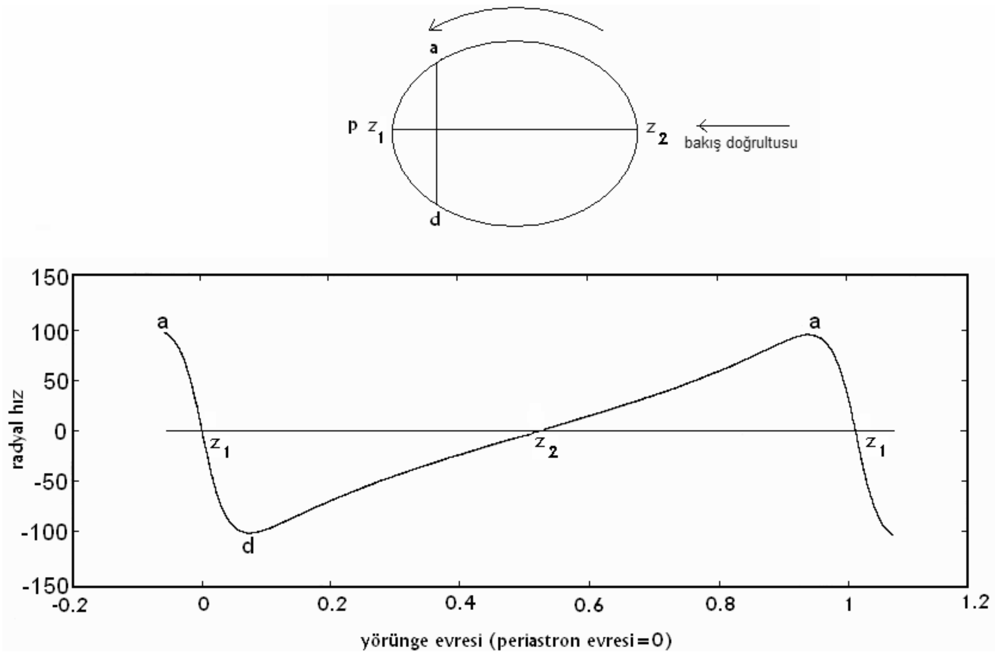



Şekil: Mizar (zeta ursae majoris) ‘n radyal hız eğrisi.( http://images.google.com.tr/imgres?imgurl=http://leo.astronomy.cz/img/vr.gif&imgrefurl=http://leo.astronomy.cz/mizar/article.htm&h=375&w=420&sz=9&hl=tr&start=2&um=1&tbnid=Ak3G0F-OpSA_MM:&tbnh=112&tbnw=125&prev=/images%3Fq%3Dradial%2Bvelocity%2Bof%2Bzeta%2Bursae%2Bmajoris%2Bbinary%2Bstar%26svnum%3D10%26um%3D1%26hl%3Dtr%26rlz%3D1T4SKPB_enTR242TR243%26sa%3DN

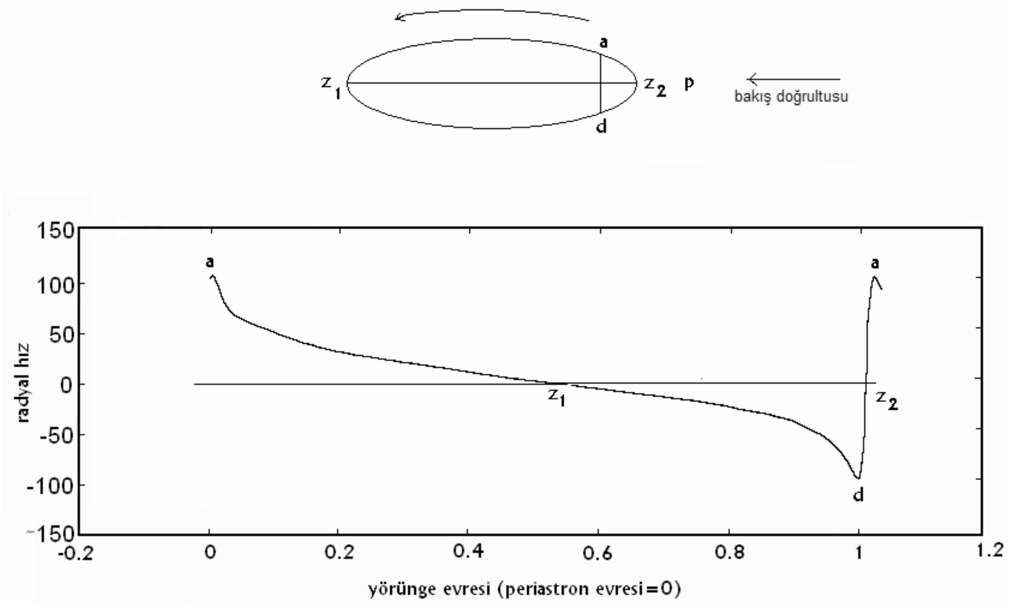
Şekil-13




Şekil-14.a. Dış merkezliği $e$=0.3 ve periastronun boylamı $\omega$=0° olan eliptik yörünge ve buna karşılık gelen radyal hız eğrisi gösterilmiştir. p periastronu temsil etmektedir.

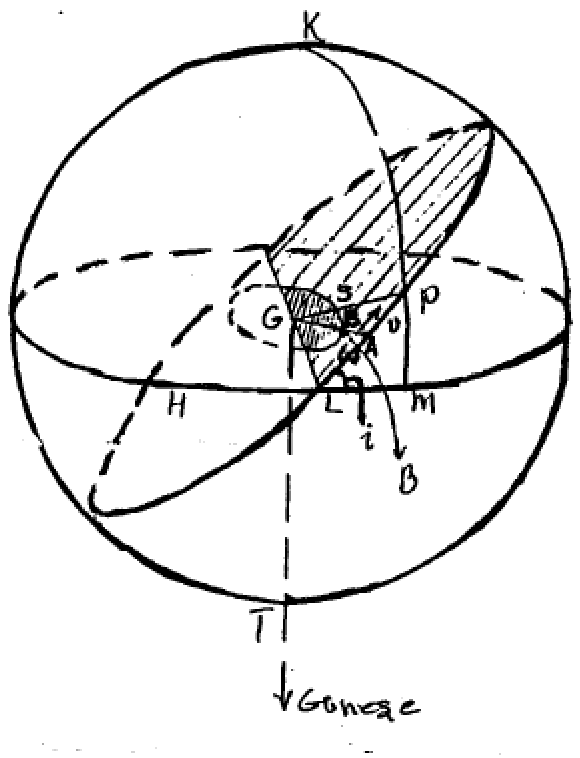



Şekil-14.b. Dış merkezliği $e$=0.6 ve periastronun boylamı $\omega$=90° olan eliptik yörünge ve buna karşılık gelen radyal hız eğrisi gösterilmiştir. p periastronu temsil etmektedir.




Şekil-14.c. Dış merkezliği $e$=0.9 ve periastronun boylamı $\omega$=270° olan eliptik yörünge ve buna karşılık gelen radyal hız eğrisi gösterilmiştir. p periastronu temsil etmektedir.

Zaman tamamen gökyüzü düzleminin içindedir. Çift yıldızın kütle merkezi düğümler doğrusu üzerinde ve bu nedenden gökyüzü düzlemi içinde olduğundan yoldaş yıldızda gökyüzü düzleminin içindedir. Bileşen yıldızlardan birini kütle merkezine birleştiren doğru diğer bileşen yıldızdan da geçer. Böylece bileşenlerden biri düğümlerden biri düğüm noktalarından birinde bulunduğu zaman, bu diğer bileşene birleştirilen doğru görüş doğrultusuna dik olur. Bu sebepten bu andaki çekim kuvveti düğümler doğrultusunda olup görüş doğrultusunda bileşeni yoktur. Bundan dolayı yıldız düğüm noktalarından birinde bulunduğu zaman görüş doğrultusunda ivmesi sıfır olur. O halde yıldızın hızının bileşenini gökyüzü düzlemine dik kabul edersek (görüş doğrultusundaki hız veya radyal hız) bu bileşen hızın, yıldız düğüm noktasına gelinceye kadar çoğaldığı (ivme pozitif) ve düğüm noktasında sıfır ve düğüm noktasını geçer geçmez azaldığı (ivme negatif) görülür.




Şekil-15

Sistemin çiftliği, radyal hızların spektroskopik gözlemlerinden çıkarılan bir sistemi gözönüne alalım. Yukarıdaki Şekil-15 de gösterildiği gibi ağırlık merkezi G de bulunan bir çift yıldız sisteminde, her yıldız G etrafında elips şeklinde bir yörünge çizer. Genel olarak yörünge düzlemi görüm çizgisine göre eğik bulunacaktır. $\Omega$ (düğüm boylamı) dışında yörünge elemanları görsel çift yıldızlardaki gibidir. Görüm çizgisine dik düzlemin üzerinde belirli bir referans noktası bulunmamasından dolayı $\Omega$ belirtilmez.

Ölçümlerden çıkartılan radyal hızlarda arzın güneş etrafındaki hareketlerinden ileri gelen bir kısımda vardır. Burada bu kısmı ihmal edeceğiz ve böylece ortaya çıkan değer yıldızın güneşe nazaran radyal hızını gösterir.

G'yi güneşe birleştiren doğru küreyi T'de kessin. Kutbu T olan büyük daire HLM'dir ve bu düzleme daha önceki gibi görünen yörünge düzlemi gibi bakabiliriz. Öteki kutup K olsun. R (km olarak), GS yarıçap vektörü göstersin; S yıldızlardan birinin güneşe nazaran yörüngesi üzerindeki durumudur. Yıldız G'ye en yakın bulunduğu zaman yarıçap vektör GB olsun. Bu taktirde SGB açısı veya PGA açısı $\nu$ gerçek anomalisidir. Hareket doğrultusu A'dan P'ye doğru olduğu varsayılıyor. L çıkma düğümü ve LA = $\varpi$ dir. Z, S 'in HLM düzlemine olan uzaklığını göstersin. S, bu düzleme göre K ile aynı tarafta bulunduğu zaman uzaklık pozitif kabul edilmektedir. Z için şu yazılabilir :

$$Z = r\sin(PM)$$

KPM, P'den geçen büyük daire yayıdır. PLM üçgeninde LP=$\varpi+\nu$, PLM=i ve PLM = $90^{o}$ dir. Buradan

Sin(PM)= sin(ϖ+ν)sin(i)

Bulunur. Buna göre

Z= rsin(ϖ+ν)sin(i) ...........(1)

Olur. Z km cinsindendir. Z'nin zamanla değişen kısmı dz/dt, sistemin G ağırlık merkezine göre S yıldızının radyal hızını verir. Sisteminde Güneşe göre bir radyal hızı bulunacaktır, bunu V ile gösterelim. Bu durumda V, G'nin radyal hızıdır, ve hareket Güneşe göre uzaklaşma hareketi olduğu taktirde V pozitif kabul edilmektedir. Burada S yıldızın güneşe göre radyal hızı

$$R = V + \frac{dz}{dt} \text{............(2)}$$

olacaktır. R değeri spektroskopik gözlemlerden çıkarılır. Her iki yıldızda spektrumları fotoğraf plağı üzerinde tespit edilebilecek kadar parlak ise, her ikisinin de radyal hızları bulunabilir. Ancak şimdilik bileşenlerden birinin radyal hızının ölçülmesi mümkün olan spektroskopik çift yıldızlar tipini göz önüne alacağız.

S yıldızının, G etrafındaki hareketine uygulanan bağıntılar şöyle idi :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+\theta\cos(\nu)} \text{ (elips denklemi) ..........(3)}$$

$$r^2\frac{dv}{dt} = h = [\mu a(1-e^2)]^{1/2} \text{ (alanlar kanunu) .........(4)}$$

$$\mu = G(M+m) = n^2a^3 \text{ (Keplerin 3. kanunu) ........(5)}$$

$$n = \frac{2\pi}{P} \text{ (ortalama açısal hareket)}$$

formüllerde geçen a yarıbüyük eksen olup km cinsinden ifade edilir, h alanlar sabitidir.

(1) den

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin(\nu+\omega)\sin(i) + r\cos(\nu+\omega)\sin(i)\frac{dv}{dt}$$

ve (3), (4), (5) den

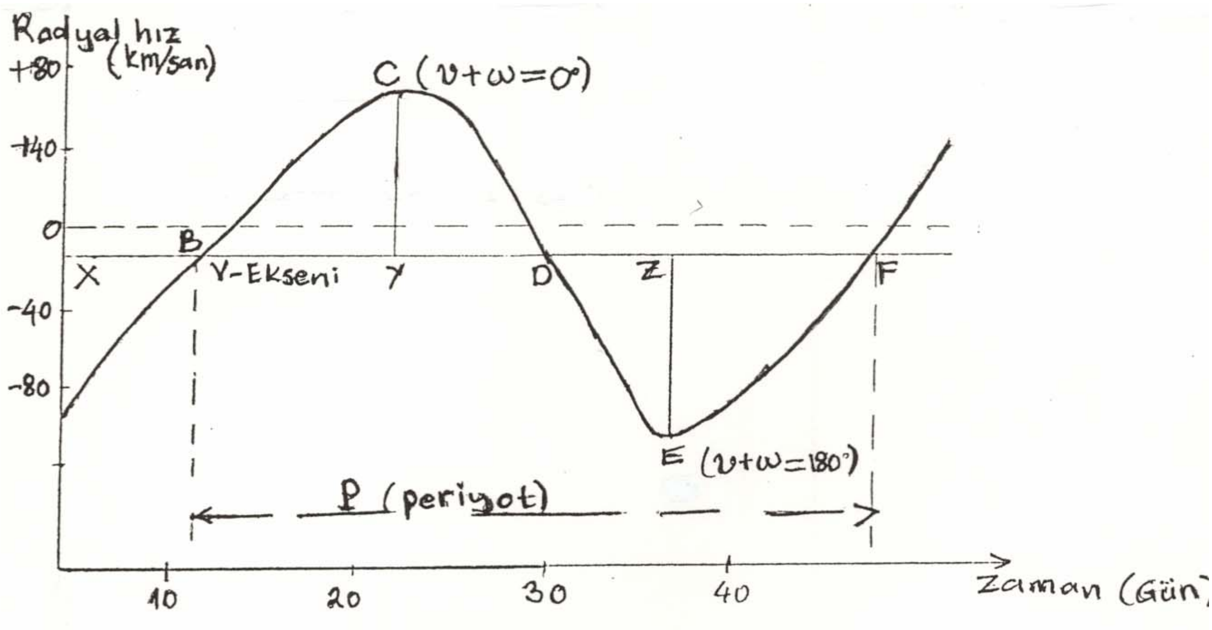
$$\frac{dr}{dt} = \frac{nae\sin(\nu)}{(1-e^2)^{1/2}} \text{ ve } r\frac{dv}{dt} = \frac{na[1+e\cos(\nu)]}{(1-e^2)^{1/2}}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{dz}{dt} = \frac{na\sin(i)}{(1-e^2)}[\cos(\nu+\omega)+e\cos(\omega)] \text{ ...........(6)}$$

bu bağıntıyı (2) de kullanıp R radyal hızını V, ν ile yörünge elemanları cinsinden ifade etmiş oluruz.

Genel olarak spektroskopik çift yıldızların yörünge periyotları birkaç gündür ve gözlemler birkaç ay hatta yıllarca sürebileceğinden, yörünge periyotları büyük bir hassaslıkla bulunabilir. Şimdi mevcut bütün gözlemlerden, R radyal hızı ile zaman arasındaki eğriyi (hız eğrisi) çizebiliriz. (Şekil-16'ya bakınız).




Şekil-16

Şekilden görüldüğü gibi C de radyal hız maksimum pozitif değerini (yaklaşık 60km/s) ve E'de de maksimum negatif değerini (yaklaşık –115km/s) alır. Çift yıldızın 15km/s'lik hızla güneşe yaklaştığını varsayalım. Bu durumda V=-15 km/sn'dir. V'nin bu çizgisine V ekseni denir. Bu çizgiden itibaren eğriye kadar ölçülen ordinatlar dz/dt'nin değerlerini verir.

Hız eğrisinden itibaren yörünge elemanlarının çıkarılmasına ilişkin bir çok yöntem vardır. Bir burada bunlardan bir tanesini incleyeceğiz.

### 3-2) Lehmann-Filhés yöntemi :

(6)'yı şöyle yazalım .

$$\frac{dz}{dt} = K[\cos(\nu + \omega) + e\cos(\omega)] \text{.................}(7)$$

burada

$$K = \frac{na(\sin(i)}{(1-e^2)^{1/2}} \quad ....................(8)$$

$(\nu+\omega)=0^o$ olduğunda *dz/dt* maksimumdur; radyal hız C'de maksimum olduğundan V ekseninden itibaren ölçülen YC ordinatı

$$\alpha = K\,[1+e\cos(\omega)] \quad ......................(9)$$

olacaktır. $(\nu+\omega)=180^o$ olduğu zaman radyal hız E de maksimum negatif değerini alır. Eğer β EZ ordinatı ise,

$$\beta = K[1-e\cos(\omega)] \quad ...................(10)$$

son iki bağıntıdan

$$K = (\alpha+\beta)/2 \quad ...........................(11)$$

$$e\cos(\omega) = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \quad ...................(12)$$

Bulunur. α ve β 'nın ölçülmesi, K ile ecos(ω)'nın değerlerinin çıkarılmasını sağlar.

V ekseni, üst tarafında kalan BCD ile alt tarafında kalan DEF alanının eşit bulundukları düşünülerek saptanır. Bunu görmek için şöyle düşünelim. Herhangi bir ordinat *dz/dt* ve apsis de *t* zamanını göstersin. Buna göre BCD alanı

$$q\int \frac{dz}{dt}\,dt$$

integrali ile bulunur. İntegral sınırları *t*'nin B ve D'deki değerleridir. Q da alanın ölçüldüğü birimlere bağlı bir sabittir.

Böylece alan

$q(z_D - z_B)$

olur. Burada $z_D$, z'nin hız eğrisi üzerindeki D noktasına ait değeridir. Benzer şekilde DEF alanı da

$q(z_F - z_D)$

dir. BF tam bir dolanıma karşılık geldiğinden $z_F = z_B$ dir ve bu durumda her iki alana ait sayısal ifadeler eşit olur. Görüldüğü gibi V ekseninin çizilmesi uzun denemelerden sonra yapılır.

CYD alanı $\Delta_1$ ile gösterilirse

$$\Delta_1 = z_D - z_C \quad .................(13)$$

dir. C 'de $\nu+\omega = 0^o$ den ve (1) 'den $z_C = 0$ bulunur. Buradan

$$\Delta_1 = z_D \quad .....................(14)$$

olur. Benzer şekilde DZE alanı ($z_E$-$z_D$) ‘ye eşittir. Ve $z_E$ sıfır olduğundan DZE alanı CYD alanına yani $\Delta_1$ ‘ye eşittir. BCY ve ZEF alanlarının da eşit oldukları benzer yolla gösterilebilir.

Eğer $\nu_1$ ve $r_1$ , gerçek yörünge üzerinde, şekildeki D’ye karşıt olan noktanın gerçek anomalisi ve yarıçap vektörü iseler (1) ve (14) ‘den

$$\Delta_1 = r_1 \sin(\nu_1+\omega)\sin(i) \quad ..................(15)$$

bulunur.

D noktasında dz/dt ‘nin değeri sıfır olduğundan (7)’den

$$\cos(\nu_1+\omega) = -e\cos(\omega)$$

ν(12)’den

$$\cos(\nu_1+\omega) = -\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$$

ve buradan da

$$\sin(\nu_1+\omega) = \pm\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}$$

bulunur.

Hız eğrisi üzerinde, C’den E’ye doğru gidildiği zaman, radyal hız, D noktasından geçerken pozitif iken negatif olur. Şekil-16’ya bakarak hız eğrisi üzerindeki D noktasının (Şekil-15‘de) gerçek yörünge üzerindeki z’nin maksimum pozitif değerine sahip bulunduğu noktaya karşıt olması gerektiğini anlarız. Bu durumda (1) den $\sin(\nu_1+\omega)$ pozitif ve buna göre de

$$\sin(\nu_1+\omega) = +\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \quad ..................(16)$$

olur. Şimdi $\Delta_2$ ile göstereceğimiz ZEF alanını gözönüne alalım. Bu durumda

$$\Delta_2 = z_F - z_E$$

ve $z_E = 0$ olduğundan

$$\Delta_2 = z_F$$

olur.

Eğer $\nu_2$ ve $r_2$ , hız eğrisi üzerindeki F’ye, gerçek yörünge üzerinde karşıt olan noktaya ait ise

$$\Delta_2 = r_2 \sin(\nu_2+\omega)\sin(i) \quad .................(17)$$

olur. Halbuki F’de dz/dt sıfırdır

$$\cos(\nu+\omega) = -e\cos(\omega) = -\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$$

ve bu durumda da

$$\sin(\nu_2 + \omega) = -\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha + \beta} \quad \text{..............(18)}$$

olur.

F gerçek yörünge üzerinde z'nin maksimum negatif değerini aldığı noktaya karşıt olduğundan son ifade de eksi işareti alınmıştır. (15), (16), (17) ve (18)'i kullanarak

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = -\frac{r_1}{r_2}$$

buluruz. Eğer $\Delta_1$ ve $\Delta_2$'nin her ikisini de pozitif büyüklükler olarak kabul edersek

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

yazabiliriz. Fakat

$$r_1 = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\nu_1)}$$

olduğundan $r_2$ için de buna benzer bir ifade vardır. Buradan

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{1+e\cos(\nu_2)}{1+e\cos(\nu_1)}$$

bulunur. Son denklem

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{1+e\cos[(\nu_2+\omega)-\omega]}{1+e\cos[(\nu_1+\omega)-\omega]} = \frac{1+e\cos(\omega)\cos(\nu_2+\omega)+e\sin(\omega)\sin(\nu_2+\omega)}{1+e\cos(\omega)\cos(\nu_1+\omega)+e\sin(\omega)\sin(\nu_1+\omega)}$$

şeklinde yazılabilir. (12), (16) ve (18) 'in kullanılması ile bu ifade

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{2\alpha\beta - \sqrt{\alpha\beta}(\alpha+\beta)e\sin(\omega)}{2\alpha\beta + \sqrt{\alpha\beta}(\alpha+\beta)e\sin(\omega)}$$

ve buradan

$$e\sin(\omega) = \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \cdot \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Delta_2 + \Delta_1} \quad \text{...........(20)}$$

bulunur. $\Delta_1$ ve $\Delta_2$ alanlarının ölçülmesi ile (her ikisi de pozitif) (20) den esin($\omega$) 'nin değeri çıkarılabilir. Fakat

$$e\cos(\omega) = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

olduğundan, bu denklem ile (20), e ve ω ‘yı belirtir.

Periastrondan geçiş zamanı olan T’nin belirtilmesi için bu anda ν = 0 olduğuna dikkat edelim. dz/dt 'nin buna karşılık gelen değeri (7)’den

$$z_1 = K(1+e)\cos(\omega) \quad ..........(21)$$

bağıntısı ile bulunur. K, e ve ω ‘nın değerleri biliniyor varsayıldıklarından $z_1$ ’in değeri bulunabilir. Hız eğrisinin (21) ile verilen iki ordinatı vardır. Ancak C’de ν+ω = $0^0$ ve E’de ν+ω = $180^o$ olduğuna dikkat edilerek gerekli ordinat seçilir. Böylece ω ‘nın değeri örneğin $60^o$ olarak bulunmuş ise C’deki değeri $300^o$ ve E’deki değeri $120^o$ ‘dir, bu örnekte periastron, hız eğrisi üzerinde C’nin ordinatının yarısına karşılık gelecek ve periastrondan geçiş zamanı olan T’de (apsis) örneğin B’ye karşılık gelen tarihten itibaren ölçülmüş olacaktır.

(8) ve (11)’den

$$K = \frac{na\sin(i)}{(1-e^2)^{1/2}} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \quad ................(22)$$

olur. *P* periyodu biliniyor varsayılırsa

$$n = \frac{2\pi}{P}$$

dan ve (22)‘den

$$a\sin(i) = \frac{P(\alpha+\beta)(1-e^2)^{1/2}}{4\pi}$$

bulunur. Genel olarak *P* periyodu gün cinsinden α ile β da km/sn olarak ifade edilir. Bu birimlere göre son denklem

$$a\sin(i) = \frac{21600P}{\pi}(\alpha+\beta)(1-e^2)^{1/2} \quad ................(23)$$

(1 gün = 86400 saniye olarak düşünerek) şeklini alır. Bu bağıntı *P* gün olarak ifade edildiğine göre αsin(*i*) büyüklüğünün kilometre cinsinden değerini verir. *i* eğimi başka vasıtalarla tayin edilmedikçe sistemin ağırlık merkezine göre α yarı büyük ekseni tayin edilemez.

Sonuçta yapılan işlemleri şöyle özetleyebiliriz :

1- Ardarda denemelerle mümkün olduğunca doğru periyodu bul ve en olasılı hız eğrisini çiz.
2- Bir planimetre kullanarak, alanların integrasyonu ile V-ekseninin yerini bul.
3- C ve E noktalarının ordinatlarını ölç ve uygun birimlerde CYD ve DZE alanlarını bul.
4- (11), (12) ve (20)’den K, e ve ω’yı belirle.
5- (21)’den veya ν’nin değerinden hesaplayarak D noktası için T bulunur.
6- (23)’den αsin(*i*)’yi bul.

## 3-3) Spektroskopik ÇİFt Yıldızların Kütleleri :

Her iki bileşen yıldızın hız eğrileri çizilebilirse bunların kütle oranları hemen bulunabilir, çünkü her iki eğri görünüş olarak aynıdır, fakat genlikleri yıldız kütleleri ile ters orantılıdır. Eğer yörünge düzleminin bakış doğrultusuna dik düzleme göre i eğimi bilinmiyorsa kütleler ayrı ayrı hesap edilemez. Eğer tek bir bileşenin hız eğrisi biliniyorsa o zaman kütle ile ilgili kütle fonksiyonu denilen bir büyüklük elde ederiz.

## 3-3-a) İki spektrumun mevcut olduğu durum :

Çift yıldızın iki üyesi de yeterli derece parlak olduğu taktirde, her yıldıza bağlı hız eğrisi az önce anlatılan metodla (veya başka bir yolla) analiz edilebilir. Sistemin ağırlık merkezine göre yörüngelerden birinin yarı büyük ekseni $a_1$, diğerinin yarı büyük ekseni $a_2$ olsun. Bu durumda yıldızlardan birinin diğerine göre yörüngesinin yarı büyük ekseni $a_1+a_2$ olur. Bunu a ile gösterelim. İki rölatif yörünge için şu bağıntılar yazılabilir.

$$\frac{a^3}{P^2} = M_1 + M_2 \text{ .................(1)}$$

$$a_1M_1 = a_2+M_2 \text{ ................(2)}$$

$$a = a_1 + a_2 \text{ ................(3)}$$

$$a\sin(i) = a_1\sin(i) + a_2\sin(i) \text{ ............(4)}$$

Buradaki 1. bağıntı Keplerin 3. kanunu, 2. bağıntı kütleler merkezini tanımlar. 3. denklem az önce söylenilen durumdan dolayı yazılabilir ve 4. denklem ise 3. denklemin sin(i) ile çarpılmış değeridir. Çünkü her iki spektrum bilindiği taktirde gözlemle (örneğin Lehmann-Filhés metodundaki gibi) $a_1\sin(i)$ ve $a_2\sin(i)$ değerleri bulunabilir.

(1) ve (2)'yi kullanarak

$$M_1 = \frac{a^3}{P^2(1+\frac{a_1}{a_2})} \text{ ................(5)}$$

İki tarafını $\sin^3(i)$ ile çarparsak

$$M_1\sin^3(i) = \frac{a^3\sin^3(i)}{P^2(1+\frac{a_1\sin(i)}{a_2\sin(i)})} \text{ ................(6)}$$

(3)'ü kullanarak

$$M_1\sin^3(i) = \frac{[a_1\sin(i)+a_2\sin(i)]^3}{P^2(1+\frac{a_1\sin(i)}{a_2\sin(i)})} \text{ ...............(7)}$$

Bu denklemin sağ tarafındaki değerlerin hepsi gözlemle bulunabiliyor. O halde burada $M1\sin^3(i)$ değeri hesaplanmış olur. Benzer şekilde (1) ve (2)'den hareket ederek $M_2\sin^3(i)$ ifadesi bulunabilir. Böylece oran alarak $M_\odot$ cinsinden ($M_1/M_2$) kütleler oranını bulabiliriz. Herhangi bir yolla i açısı bulunabilirse o zaman iki kütle ayrı ayrı belirlenebilir. (7) formülünde $a_1$ ve $a_2$ "AB" cinsinden ve P'de "yıl" cinsinden olduğuna dikkat edilmelidir.

## 3-3-b) Tek Spektrumun Olduğu Durum

(2) ve (3)'den yararlanarak

$$\frac{a}{M} = \frac{a_1 + a_2}{M_1 + M_2} = \frac{a_1}{M_1} = \frac{a_2}{M_2} \quad \text{.................(8)}$$

ve (1) denkleminde,

$$a = \frac{a_1 (M_1 + M_2)}{M_2} \quad \text{...................(9)}$$

ifadesinin kübü alınırsa ve yerine konursa

$$M_1 + M_2 = \frac{a_1^{\,3} (M_1 + M_2)^3}{M_2^{\,3} P^2} \quad \text{................(10)}$$

ve

$$\frac{a_1^{\,3}}{P^2} = \frac{M_2^{\,3}}{(M_1 + M_2)^2} \quad \text{..............(11)}$$

bulunur. İki tarafını $\sin^3(i)$ ile çarparsak

$$\frac{a_1^{\,3} \sin^3(i)}{P^2} = \frac{(M_2 \sin(i))^3}{(M_1 + M_2)^2} \quad \text{.............(12)}$$

bulunur. Bu ifadenin sol tarafındaki büyüklüklerin değeri gözlemle bulunabildiğinden ($M_1$ kütleli yıldızın kütle merkezi etrafındaki yörüngesi bilindiği taktirde) sağ taraf tek bir büyüklük olarak tayin edilebilir. Bu büyüklüğe spektroskopik çift yıldızların kütle fonksiyonu adı verilir.