İ Ç İ N D E K İ L E R

1. TEMEL KAVRAMLAR VE TERMİNOLOJİ

1.1 Çift Yıldızların Tanımı ve Sınıflaması

Bir çift sistem basitçe, karşılıklı çekim etkisi altında ortak çekim merkezi etrafında kapalı yörüngeler çizen iki yıldız olarak tanımlanabilir. Bu tanımlamada hiç bir kısıtlama yoktur. Yani yıldızlar birbirlerine değebilirler, veya aralarında binlerce astronomik birim (veya daha fazla) de olabilir. Çift yıldızların sınıflaması gözlem yöntemine göre yapılabilir. Aralarında çok geniş mesafeler bulunan çiftler, teleskopla ayırt edilebilir ve görsel olarak çift olduğu anlaşılabilir. Bunlara "görsel" veya "vizüel" çift sistemler denir. Bazen iki yıldız görülemez ve özellikle yıldızlardan birinin görüldüğü durumda, görünen yıldızın aynı alandaki arkadaki fon yıldızlarına göre pozisyonu dikkatli ölçümlerden bulunabilir. Eğer pozisyonunda bir değişiklik olursa, bu görülmeyen bileşenden olabilir. Bu sistemlere de "astrometrik" çiftler denir. Birçok durumda, yıldızlar birbirine çok yakın olduğundan bir teleskopla ayırt edilemez veya dikine hızlarından çift olduğu çıkartılamaz. Bunlar radyal hızlarındaki değişimlerden tayfsal (spektroskopik) olarak belirlenebilir. Bu nedenle bunlarda “Tayfsal” (Spektroskopik) çiftler adını alırlar. Çift yıldızların bazılarının yörünge düzlemleri o şekilde yönlenmiştir ki bunlar dünyadan bakıldıklarında birbirlerini örterler. Bu nedenle bu çeşit çift yıldızlara "Örten" çiftler olarak adlandırılır.

1.2 Yörünge Elemanları

Gezegen yörüngelerinde olduğu gibi çift yıldız yörüngelerinde de benzer elemanlar tanımlanabilir. Bu elemanlar (Şekil 1.'e bakınız):

P = Yörünge periyodu, spektroskopik veya örten çiftlerde gün cinsinden veya vizüel çiftlerde yıl cinsinden ifade edilir.

i = Yörünge düzleminin, gökyüzüne teğet düzleme göre eğimi (kısaca yörünge düzleminin eğimi)

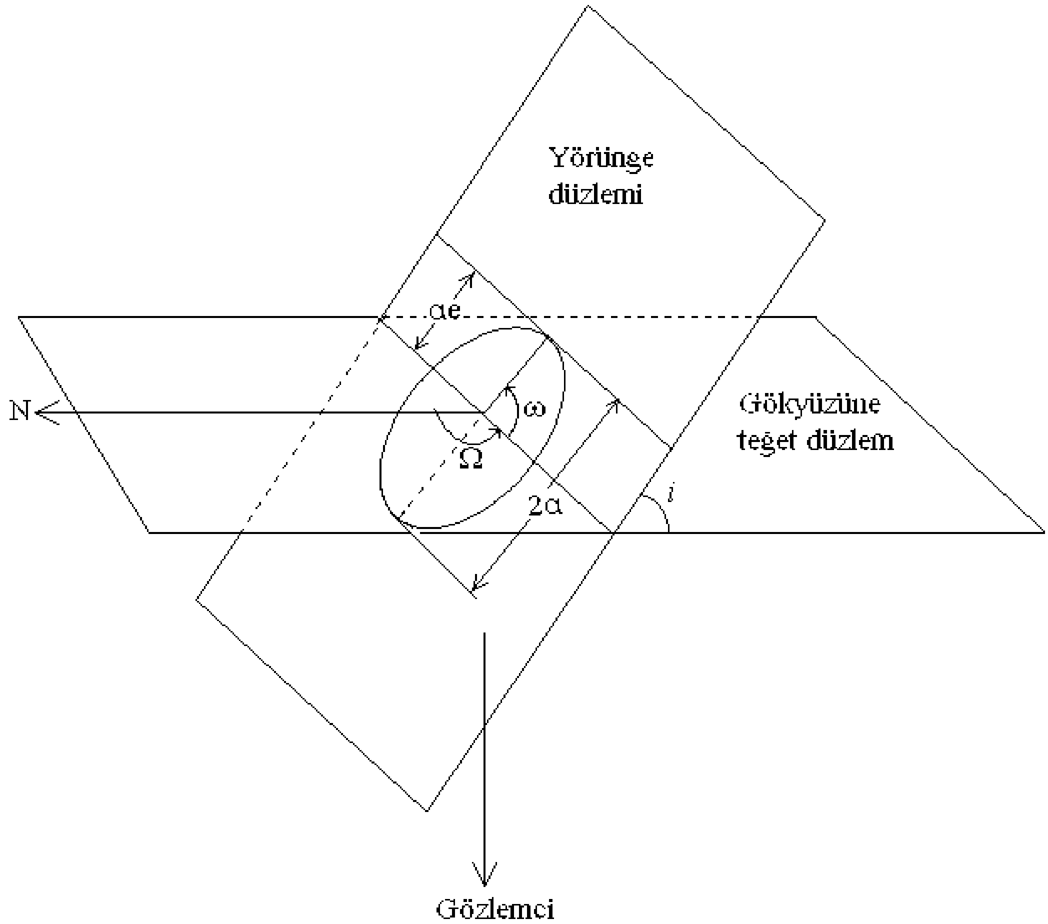
Ω = Yörünge ve teğet düzlemlerin kesim noktalarını birleştiren düğümler çizgisinin durum açısı (kuzeyden doğuya doğru ölçülür) teğet düzleminde ölçülür.

ω = Çıkış düğümü ile iki yıldızın birbirine en yakın olduğu enberi (periastron) noktası arasındaki açıdır. Bu açı yörünge düzleminde, yörünge hareketi yönünde ölçülür. Bu açı periastronun boylamı olarakta isimlendirilir.

a = Yörüngenin yarı - büyük ekseni, genellikle km veya astronomik birimlerle ifade edilir.

e = Yörüngenin eksentrisitesi veya dış merkezliği, 0 ile 1 arasında boyutsuz bir sayıdır.

T = İki yıldızın periastrondan geçme anıdır.



Şekil 1.

Görsel çift yıldızların gözlemlerinden *P, i ,ω , e, ve T* belirlenebilir. Eğer radyal - hız gözlemleri mevcut değilse, yörüngenin çıkış ve iniş düğümlerini ayırmak mümkün değildir. Bu nedenle sadece görsel gözlemlerden çıkarılan Ω da 180 derecelik bir belirsizlik olur. Yörüngenin eğimi için eğer görünen hareket direkt ise, $0 < i < 90$ almak uygundur yok eğer retrograde ise $90 < i < 180$ alınır. Kabul edilir ki $\Omega < 180$ ise bu çıkış düğümüdür.

1.3 Gravitasyon Kanunu ve Kepler Kanunları

Newtonun genel çekim kanunu şöyle ifade edilebilir: Evrendeki maddenin her parçacığı birbirlerini, kütlelerinin çarpımı ile doğru, aralarındaki uzaklığın karesiyle ters orantılı olarak çekerler. Matematiksel ifadesi

$$F = G\frac{M_1 M_2}{r^2}$$

şeklindedir. Burada *F* Kuvveti, *G* çekim sabiti (= 6.673×10^{-8} cm/gr s), M_1 ve M_2 kütle ve *r* kütleler arasındaki uzaklıktır. Kepler kanunları da matematiksel olarak Newton çekim kanunundan çıkarılabilir ve gerçek yörüngesindeki bir çift sistem için geçerlidir. Buna göre Kepler kanunları şöyle ifade edilebilir:

1) Her bileşenin mutlak yörüngesi odaklarından birinde çekim merkezinin bulunduğu bir elipstir. Sönük bileşenin parlak bileşene göre rölatif yörüngesi odaklarından birinde parlak bileşenin bulunduğu bir elipstir. Bu elips polar koordinatlarda şöyle yazılır:

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\upsilon}$$

Burada *r* yarıçap (radius) vektör, *e* eksentrisite (dış merkezlik), *v* gerçel anomalidir.

2) Alanlar Kanunu : Her bileşenin yarıçap vektörü eşit zamanlarda eşit alanlar süpürür. Gerçek yörüngedeki rölatif elips için, *h* bir sabit olmak üzere, şunu yazabiliriz:

$$h = r^2\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)$$

3) Harmonik Kanun : Bileşenlerin kütlelerinin toplamı, ortalama uzaklığın küpünün periyodun karesine bölümüne eşittir. Matematiksel olarak şöyle yazabiliriz:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G\left(M_1 + M_2\right)}{4\pi^2}$$

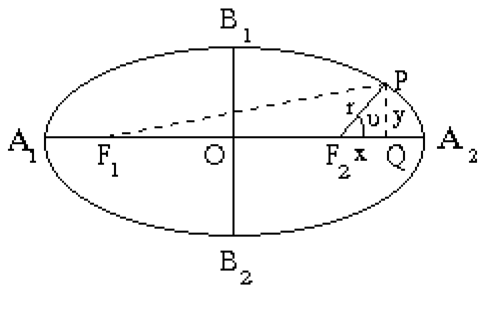
Kütleler güneş kütlesi cinsinden, uzaklık astronomik birim ve periyot da yıl cinsinden alınırsa

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{P^2}$$

olur. Böylece a ve P elemanları birbiriyle bağımlıdır.

1.4 Elips Hakkında Genel Bilgiler

İki noktaya olan uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yeri bir elipstir (Şekil 2.'ye bakınız). Bu elips üzerinde şunlar tanımlanır:



Şekil 2.

$A_1A_2 = 2\,a$ = Büyük eksen
$B_1B_2 = 2b$ = Küçük eksen
$A_2 = F_2$ Odağına göre enberi (periastron) noktası
$A_2F_2 = F_2$ Odağına göre enberi uzaklığı
$A_1 = F_2$ Odağına göre enöte (apastron) noktası
$A_1\,F_2 = F_2$ Odağına göre enöte uzaklığı
$a = OA_1 = OA_2$ = Yarı büyük eksen uzunluğu
$b = 0B_1 = 0B_2$ = Yarı küçük eksen uzunluğu
$c = 0F_1 = OF_2$ = Odak uzunluğu
$e = c/a$ dış merkezlik
$r = F_2$ Odağından elipsin herhangi bir noktasına giden vektör
υ = Gerçek anomali, r 'nın periastron doğrultusuyla yaptığı açı.

F_2 merkezli (r,υ) kutupsal koordinat sisteminde elips denklemi F_1PQ üçgeni yardımıyla bulunur.

$F_1Q^2 + PQ^2 = F_1P^2$ den
$F_1Q = 2ae + r\cos\upsilon$
$PQ = r\sin\upsilon$

ve
$F_1P + F_2P = 2a$
olduğunu hatırlayarak

$F_1P = 2a - r$

ve böylece

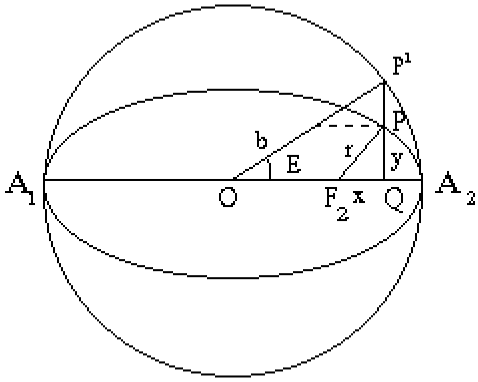
$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\upsilon}$$

olarak bulunur. $\upsilon = 90^o$ iken $r = a(1 - e^2) = p$ (p elipsin parametre uzunluğudur). Bu durumda elipsin denklemi olarak

$$r = \frac{p}{1+e\cos\upsilon}$$

yazılabilir.

Büyük eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips, $2a$ çaplı bir çember yardımıyla elde edilebilir (Şekil 3.). Bunun için çemberin herhangi A_1A_2 çapı alınır. Çember üzerindeki herhangi bir noktadan A_1A_2 'ye



Şekil 3.

bir dikme indirilir, ve kestiği nokta Q olsun. P^1O üzerinde O dan itibaren bir b uzunluğu alınıp A_1A_2 `ye bir paralel çizilir. P^1Q' yu kestiği nokta elipse ait bir noktadır. Böylece A_1, A_2 ve P^1 den geçecek şekilde elips çizilebilir. A_2OP^1 =E olsun. Bu açıya eksentrel anomali adı verilir. P nin F_2 merkezli dik kartezyen koordinatları

$$x = a(\cos E - e)$$

$$y = b\sin E = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E$$

Bunlar

$$r^2 = x^2 + y^2$$

de yerine konursa

$$r = a(1 - e\cos E)$$

bulunur. Daire ve elips üzerindeki bütün noktalar için

$$P^1Q / PQ = a / b$$

olduğuna göre elipsin alanı daire alanının bu orandaki izdüşümü olacaktır. O halde

$$Alan\ (daire) / Alan\ (elips) = \pi a^2 / Alan\ (elips) = a / b$$

buradan

$$Alan\ (elips) = \pi ab$$

elde edilir.

Bu bağıntıların dışında gerçek anomali ile eksentrel anomali arasında

$$tg\left(\frac{\upsilon}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\left(\frac{E}{2}\right)$$

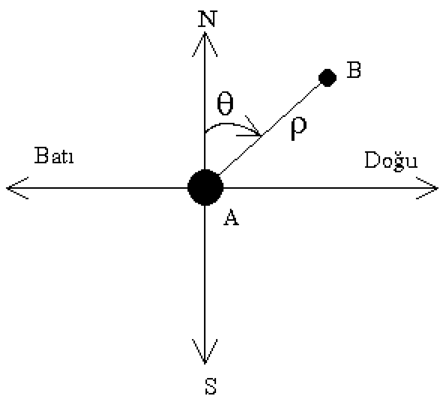
bağıntısı vardır. Ayrıca,

$$M = E - e\sin E = \left(\frac{2\pi}{P}\right)(t-T) = n(t-T)$$

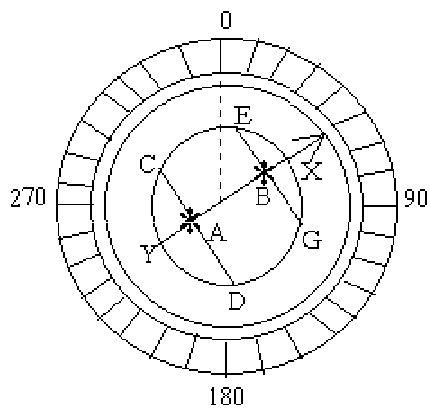
bağıntısı da bilinmelidir ki buna Kepler denklemi denir. Burada M ortalama anomali olarak bilinir ve $n=2\pi/P$ olup ortalama açısal hızdır.

2 - GÖRSEL (VİZÜEL) ÇİFT YILDIZLAR

Görsel çift yıldızlar, bir teleskopla bakıldığında ayrı ayrı görülebilen ve oluşturdukları sistemde karşılıklı çekim etkisi sonucu bir yörünge hareketi gösteren sistemlerdir. Bir çift yıldızın iki üyesi genel olarak aynı parlaklığa haiz değildir. Parlak olana baş yıldız ve zayıf olana yoldaş yıldız denir (Şekil 4. 'e bakınız). Şekilde A baş yıldızı ve B de yoldaşı göstersin. AN göğün kuzey kutup doğrultusunu belirtsin. Yani AN, A dan geçen meridyenin bir parçasıdır. θ açısı A 'ya göre B 'nın durum açısı olarak bilinir. Durum açısı okla gösterilen yönde 0^o den 360^o ye kadar doğuya doğru ölçülür. A ile B arasındaki açısal uzaklığa AB uzaklığı veya ayrıklık da denir ve ρ ile gösterilir. Buna göre θ ile ρ, B 'nin A'ya göre durumunu belirtir. A ile B bir çift yıldız sistemi oluşturuyor ise, iki yıldızın karşılıklı çekim etkisinden dolayı yoldaş baş yıldızın etrafında elips şeklinde bir yörünge çizecektir. Bu gerçek yörüngedir ve düzlemi de gerçek

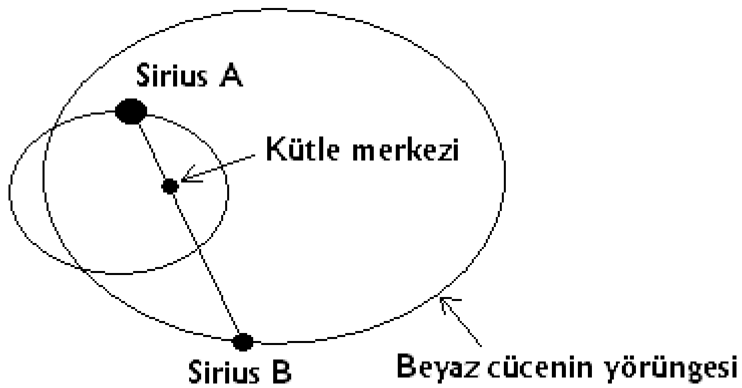


Şekil 4.



Şekil 5.

yörünge düzlemidir. Bu düzlem genellikle görüm çizgisine dik bulunan düzlemden farklı olacak ve bunun sonucu olarak gözlenen yörünge de (ki buna görünen yörünge de denir) gerçek yörüngenin görüm çizgisine dik düzlem üzerindeki izdüşüm olacaktır. Bu ikinci düzlem, görünen yörünge düzlemidir. Gözlemler görünen yörüngeye ait ayrıntıları verir. Bu gözlemlerden gerçek yörüngenin elemanlarının nasıl çıkarılacağını önümüzdeki bölümlerde göreceğiz.



Şekil 6. Sirius çift yıldız bileşenlerinin kütle merkezine göre mutlak yörüngeleri.

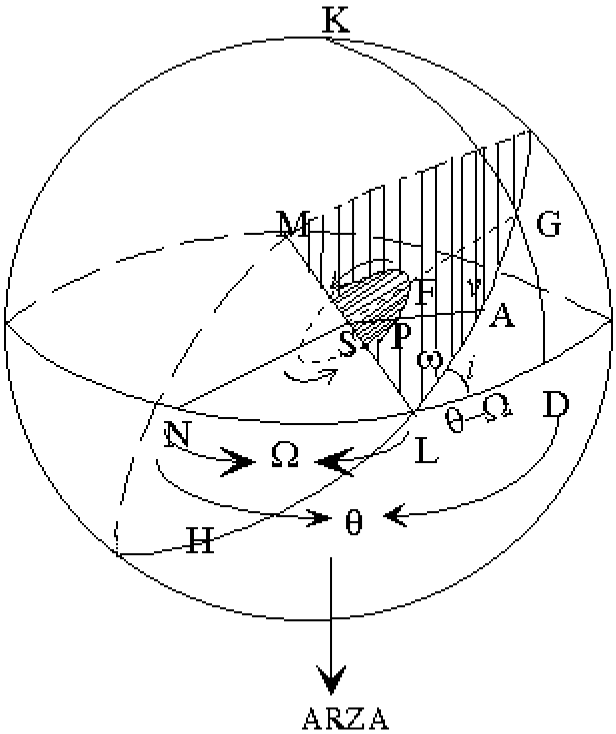
Şekil 6. da Sirius çift yıldız sisteminin yörüngesi gözükmektedir. Yıldızlardan birisi anakol yıldızı (Sirius A) ve diğeri de beyaz cücedir (Sirius B). Şekildeki yörüngeler ölçekli çizilmiş olup yıldızların büyüklükleri gerçek boyutları ile orantılı değildir. Sirius A güneşten oldukça büyük olurken, Sirius B yani beyaz cüce dünya boyutlarındadır.

2.1 Mikrometre

Pratikte iki yıldız arasındaki uzaklık ve durum açısı ölçmelerinde kullanılan alete (Şekil 5.) mikrometre denir. Bu alet dürbünün oküler ucuna bağlanır. Mikrometreli okülerin görüm alanında genel olarak üç örümcek ağı teli bulunur; bunlardan birisi şekildeki XY dir ve merkezden geçer. Diğer ikisi CD ve FG olup XY ye diktir. Tellerin tespit edildiği çerçeve dürbünün ekseni etrafında döndürülebilir. Mikrometrenin yerleştirilmesi ile A ve B yıldızların görüntüleri XY üzerine getirilebilir. Taksimatı olan bir daire vasıtasıyla θ durum açısı bulunabilir. Pratikte bu şöyle yapılır. Dürbün herhangi bir yıldıza yöneltilir ve görüntüsü XY teli üzerine getirilir. Dürbün duruyorsa, dünyanın dönmesi nedeniyle yıldız bir deklinasyon paraleli boyunca hareket eder. Eğer XY ON meridyenine dik ise bu halde yıldız XY boyunca hareket ediyor görülecektir. Bu koşul gerçekleşinceye kadar telleri taşıyan çerçeve döndürülür. Bu durumda taksimatlı eşel üzerindeki okuma 90^o veya 270^o lik bir durum açısına karşılık gelir. Buradan 0^o lik durum açısına tekabül eden okuma çıkartılır. Taksimatlı daire dürbünün optik ekseni etrafında döndürülerek, eşel tamamı ile durum açısıyla denkleştirilebilir. A ile B arasında r uzaklığı CD ve FG telleri vasıtasıyla çıkarılır. Bu teller ince bir vida ile XY ye dik olarak hareket ettirilebilir. Uzaklık ölçeği için CD, A üzerine ve FG de B nin üzerine getirilir. Bu tellerin oynatıldığı vidanın devirleriyle bu uzaklık ölçülür. Böylece bir çift yıldızın tam gözlemi, gözlem zamanı ile beraber yay saniyesi cinsinden ifade edilen iki yıldız arasındaki uzaklık ρ ve θ durum açısını verir. Birbirinden daha uzak çiftlerde gözlemler fotoğraf plakları vasıtasıyla yapılır. Diğer bir deyişle ρ ve θ plak üzerinde ölçülerek bulunur.

2.2 Bir görsel çift yıldızın gerçek yörüngesi

Merkezi S baş yıldızında bulunan bir küre çizilmiş olsun. Arzı S 'ye birleştiren doğru küreyi E de keser. Kutbu E olan büyük dairenin düzlemi görünen yörünge düzlemini verir, öteki kutup K olsun. HLG büyük dairesinin yoldaşın S baş yıldızı etrafındaki gerçek yörüngesinin düzlemini gösterdiğini varsayalım. GLD açısı i eğimini verir. MSL doğrusu düğüm çizgisidir. SN doğrusu 0 lik durum açısı yönünü göstersin. Yoldaşın S baş yıldızı etrafındaki gerçek yörüngesi şekilde ince taranmış olarak gösterilmiştir. Yoldaş, gerçek yörüngesi üzerinde F de bulunduğu zaman, görünen yörünge üzerindeki durumu, F den NLD büyük dairesine bir dik çizerek elde edilir. Bu dik KGD büyük dairesinin düzleminin içinde yer alacaktır. G, SF 'nın uzatılması ile küre üzerinde bulunan noktadır. Buna göre yoldaşın rasat edilen durumu SD yarıçapı üzerinde bulunacak ve bu halde de q durum açısı ND yayı olacaktır.



Şekil 7.

Eğer r gerçek yörüngenin yarıçapı vektörü ise ρ (görünen yörüngedeki iki yıldız arasıdaki uzaklık) uzaklığı (Şekil 7.)

$\rho = r\cos(GD)$ ....(1)

bağıntısı ile bulunur. L düğümünün durum açısı Ω ile gösterilmiştir. Şekle göre

$NL = \Omega$ ve $LD = \theta - \Omega$

dır. Gerçek yörünge üzerinde yoldaşın başyıldıza en yakın bulunduğu nokta P olsun. Daha önce söylendiği gibi bu noktaya enberi (periastron) denir. Büyük eksenin öteki ucuna da enöte (apastron) denir. Yoldaş F de iken gerçek anomali υ olsun. Bu halde yoldaş ok yönünde hareket ettiği düşünülerek FSP açısı

$FSP = \upsilon$

olur, buna göre de

$AG = \upsilon$ $LA = \omega$

olduğundan

$LG = \upsilon + \omega$

olur. D deki açısı dik olan LGD üçgeninden

$\cos(GL) = \cos(LD)\cos(GD)$

veya

$\cos(GD) = \cos(\upsilon + \omega)\sec(\theta - \Omega)$

veya (1)'i kullanarak

$\rho = r\cos(\upsilon + \omega)\sec(\theta - \Omega)$ ....(2)

elde edilir. LGD üçgeninden de

$tg(\theta - \Omega) = tg(\upsilon + \omega)\cos(i)$ ....(3)

elde edilir.

Eğer gerçek yörüngenin elemanları a,e,i,Ω,ω,T,P biliniyorsa, E'nin t zamanındaki değeri

$n = 2\pi / P$ ve

$M = n(t - T) = E - e\sin E$

den çıkarılabilir. Sonra υ gerçek anomalisi

$$\mathrm{tg}(\upsilon / 2) = \sqrt{(1+e)/(1-e)}\ \mathrm{tg}(E/2)$$

vasıtasıyla bulunur ve sonunda (2) ve (3) 'den θ ile ρ 'nun değerleri elde edilir. Böylece herhangi bir zamanda gözlemlerden bulunan ρ ve θ değerleri, yörünge elemanlarından itibaren hesap edilen değerleri ile karşılaştırılabilir. Fakat esas ilgileneceğimiz problem görünen yörüngenin çizilmesini mümkün kılan gözlemlerden gerçek yörüngenin elemanlarının çıkarılmasıdır.

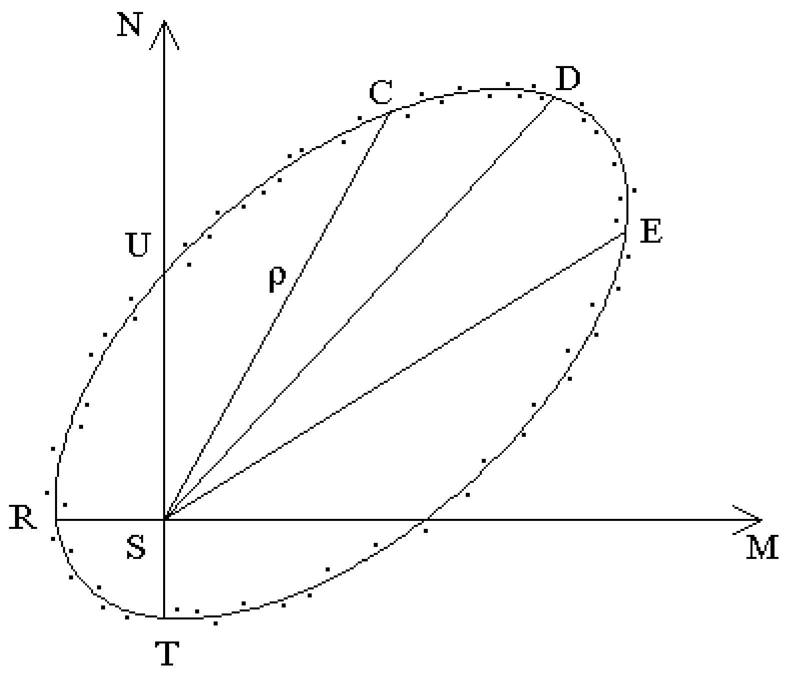
2.3 Bir görsel çift yıldızın görünen yörüngesi

Yoldaşın baş yıldız etrafındaki yörüngesini göz önüne aldığımıza göre, baş yıldız elips şeklindeki gerçek yörüngenin bir odağında bulunacaktır. Görünen yörünge, gerçek yörüngenin görüm doğrultusuna dik düzlem üzerindeki izdüşümüdür (Şekil 8.) ve buda bir elipstir. Fakat gerçek yörüngenin odağı (yani S) izdüşümün görünen yörüngenin odağı olmasını gerektirmez. Şekildeki elips görünen yörüngeyi ve S de başyıldızı göstersin. Az öncede ifade edildiği gibi, genel olarak, S bu elipsin bir odağında bulunmaz. Eğer SN, 0^o lik durum açısını belirten doğrultuyu, SM de $\theta = 90^o$ doğrultusunu gösteriyorsa, SN ve SM, x ve y eksenleri olarak alındığına göre, elipsin genel denklemi

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + 1 = 0 \quad ....(4)$$

dır. Bu denklemde A,B,...F olmak üzere göz önüne alınan özel elipsi belirten beş bağımsız sabit vardır. Yoldaş C de ise, ρ ve θ bir gözlemle bulunur, buradan da

$x = \rho\cos\theta$ ve $y = \rho\sin\theta$



Şekil 8.

vasıtasıyla, C nin x ve y dik koordinatları bulunur. Yörünge üzerine dağılmış beş farklı gözlem kuramsal olarak yukarıdaki (4 nolu) denklemin beş sabitini (A,B,C,D,F) belirlemek için yeter fakat, ρ ve θ 'nın ölçülmesindeki kaçınılmaz hatalardan dolayı bu yolla elips doğru olarak belirtilemez. Birçok yıllara yayılmış pek çok gözlemden C,D,E,.. gibi bir noktalar dizisi bulunur ve bunlardan bir ilk elips çizilebilir. Bu elipsin doğruluğu şöyle kontrol edilir. Keplerin 2. kanununa göre; gerçek yörüngede hareketli bir yarıçap vektör tarafından süpürülen alanlar, bunları süpürmek için sarfedilen zamanlar ile orantılıdır ve böyle iki alanın oranı izdüşümünde değişmez. Buna göre yoldaşın görünen yörünge üzerinde C,D ve E de bulunduğu zamanlar t_1, t_2, t_3 ise CSD alanının DSE alanına oranı $(t_2 - t_1)$'ın $(t_3 - t_2)$'ye oranına eşittir. Bu kontrol bir planimetre ile yapılabilir. Böylece ilk elips koşullar istenen düzeye gelene dek düzeltilir. (4) denkleminin A,B,C,D,F sabitleri aşağıdaki gibi çıkarılabilir. Koordinat eksenleri, görünen elipsi K,R,U ve T'de kessin. U ile T nin koordinatları $(x_1, 0)$ ve $(-x_2, 0)$ olsun. Bu

$$Ax_1^2 + 2Gx_1 + 1 = 0$$

$$Ax_2^2 + 2Gx_2 + 1 = 0$$

buradan A ve G

$$A = 1 / x_1x_2 , \quad G = -(x_1 + x_2) / 2x_1x_2 \quad ....(5)$$

bulunur. Benzer şekilde K ve R noktalarına uygulanan aynı şekil vasıtası ile

$$B = 1 / y_1y_2 , \quad F = -(y_1 + y_2) / 2y_1y_2 \quad ....(6)$$

den B ve F bulunur. Bu 4 şabit x ve y yönlerinde olmak üzere S deki baş yıldızın elipsi kestiği noktalara nazaran uzaklıklarını doğrudan ölçerek elde edilebilir. Burada işaretlerin doğru alınmasına dikkat edilmelidir. Eğer (ξ,η) görünen elips üzerindeki bir D noktasına ait ölçülen koordinatlar ise

$$H = -(A\xi^2 + B\eta^2 + 2G\xi + 2F\eta + 1) / 2\xi\eta$$

bağıntısından H bulunur.

Gerçek elipsin elemanlarının çıkarılmasına ait birçok yöntem vardır. Bunlardan en iyi bilinenler Kowalsky ile Zwier yöntemleridir. Her iki yöntemde görünen yörünge, izlenecek yolun temelini oluşturur.

2.4 Doğrultu (yön) kosinüsleri

P_1 ve P_2 noktaları arasındaki uzaklık d (Şekil 9.'a bakınız)

$$d = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]}$$

ile bulunur. Buna göre iki noktayı birleştiren bu doğrunun yön kosinüsleri şöyle tanımlanır:

$$l = \cos\alpha = (x_2 - x_1) / d$$

$$m = \cos\beta = (y_2 - y_1) / d$$

$$n = \cos\gamma = (z_2 - z_1) / d$$

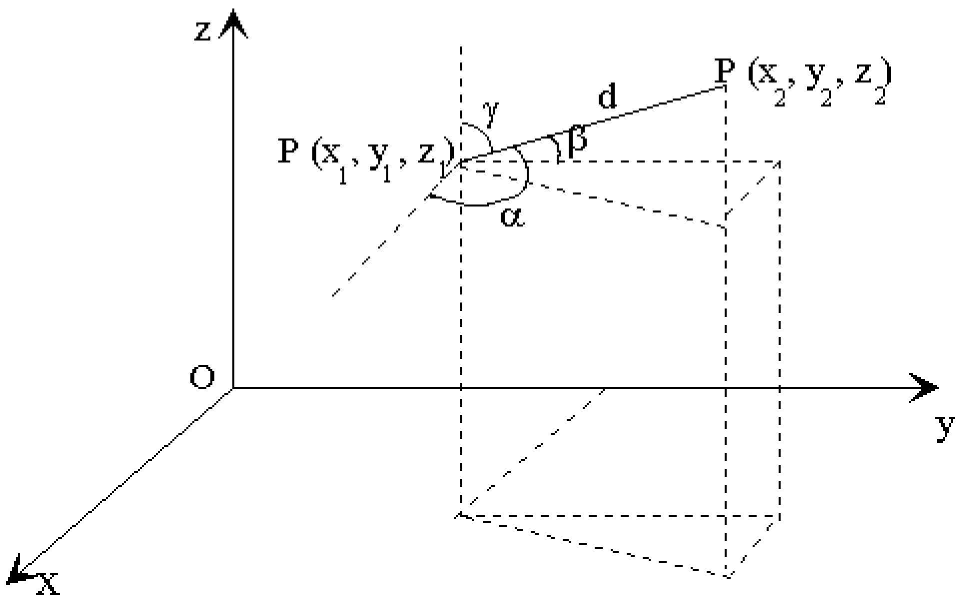
Doğrultu kosinüsleri arasında

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

veya

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

bağıntıları vardır.

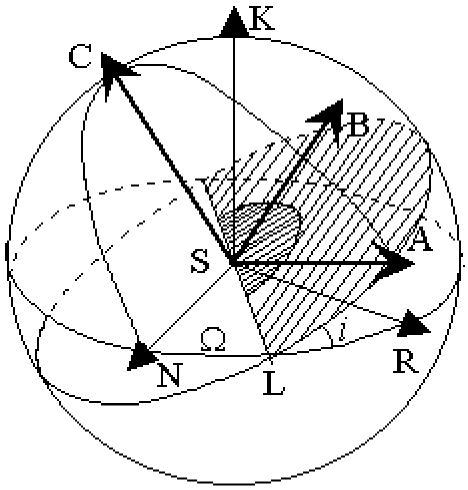


Şekil 9.

2.5 Kowalsky yöntemi

Önce görünen yörünge için yukarıdaki (4) denklemini A,B,C,D,F sabitleri tarif edilen yöntemle bulunur. Şekilde X ekseni SN (0^odurum açısı doğrultusunda) ve Y ekseni de SR (durum açısı 90^o) olacak şekilde ve K yı, NLR büyük dairesinin kutbu olarak seçelim, SK de Z ekseni olsun. SA periastron doğrultusu ve C de gerçek yörünge düzleminin kutbu olsun. S, yoldaşın baş yıldız etrafındaki gerçek yörüngesinin odağı olduğundan, yörünge elipsin gerçek yörünge düzleminin içindeki SA,SB dik eksenlerine göre denklemi (Şekil 9.):

$$(\xi + ae)^2 / a^2 + \eta^2 / b^2 = 1 \quad ....(8)$$



Şekil 9.

Bu yazılırken SA, SB ve SC gerçek yörüngedeki dik koordinatlar ve (ξ,η,0) da bu eksenlere nazaran bileşen yıldızın (yoldaşın) koordinatları olarak düşünülüyor. Burada

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

dir. Denklemi (4) ile verilen görünen yörünge, denklemi (8) de verilen elipsin NLR düzlemi üzerindeki izdüşümüdür. SA doğrultusunun SN, SR ve SK eksenlerine nazaran doğrultu kosinüsleri (l_1,m_1,n_1) (ayrıntı için Ek-1'e bakınız) olsun. Bu halde A, N ile R ve K'yı büyük daire yayları ile birleştirecek olursak,

$$l_1 = \cos(AN), \quad m_1 = \cos(AR), \quad n_1 = \cos(AK)$$

bulunur. Aynı şekilde (l_2, m_2, n_2) ve (l_3, m_3, n_3) de SB ile SC 'nin SN, SR ve SK ' ya göre yön kosinüsleri olsun. Bu halde

$$l_2 = \cos(BN), \quad m_2 = \cos(BR), \quad n_2 = \cos(BK)$$

$$l_3 = \cos(CN), \quad m_3 = \cos(CR), \quad n_3 = \cos(CK)$$

bulunur. ANL, ARL ve AKL küresel üçgenlerinden

$$l_1 = \cos(\Omega)\cos(\omega) - \sin(\Omega)\sin(\omega)\cos(i)$$
$$m_1 = \sin(\Omega)\cos(\omega) + \cos(\Omega)\sin(\omega)\cos(i) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$
$$n_1 = \sin(\omega)\sin(i)$$

elde edilir.
BLN, BLR ve BLK üçgenlerinden (veya (9) da ω yerine (ω+90) yazarak) SB 'nin doğrultu kosinüsleri olarak

l_2 = -cos(Ω)sin(ω) - sin(Ω)cos(ω)cos(i)
m_2 = -sin(Ω)sin(ω) + cos(Ω)cos(ω)cos(i) .... (10)
n_2=cos(ω)sin(i)

CLN ,CLR ve CLK üçgenlerinden

l_3 = sin(Ω)sin(i)
m_3 = -cos(Ω)sin(i) ....(11)
n_3 = cos(i)

bulunur.

Çeşitli doğrultu kosinüslerini birbirine bağlayan bağıntılar arasından aşağıdakileri kullanacağız:

$$l_1 m_2 - l_2 m_1 = n_3 \qquad \text{……………………………………..(12)}$$

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1 \qquad \text{...(13)}$$

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1 \qquad \text{……………………………………...(14)}$$

$$l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0 \qquad \text{………………………………………(15)}$$

(ξ,η), gerçek elips üzerindeki herhangi bir noktanın SA,SB eksenlerine göre koordinatlarını göstersin ve (x,y)'de bu noktanın NLR düzlemi üzerindeki izdüşümünün SN ve SR eksenlerine göre koordinatları olsun. Bu durumda izdüşümünden itibaren

$$x = l_1 \xi + l_2 \eta$$

$$y = m_1 \xi + m_2 \eta$$

olur. Buradan

$$(l_1 m_2 - l_2 m_1)\xi = m_2 x - l_2 y$$

veya (12)'yı kullanarak,

$$\xi = \frac{m_2 x - l_2 y}{n_3} \qquad \text{……………….............................(16)}$$

ve benzer şekilde

$$\eta = -\frac{m_1 x - l_1 y}{n_3} \qquad \text{……………….............................(17)}$$

olur. ξ ve η nın bu değerleri (8) 'i gerçekler yani

$$\frac{(m_2 x - l_2 y + aen_3)^2}{a^2 n_3^2} + \frac{(m_1 x - l_1 y)^2}{b^2 n_3^2} = 1 \qquad \text{……….........(18)}$$

bulunur. Fakat *x* ile *y* (4) 'ü gerçekler; bu durumda (18) ile (4) görünen yörünge düzlemi üzerinde aynı elipsi göstermelidir. Buna göre *x* , *xy*, *y* 'nin (4)'deki katsayıları, (18)'deki katsayıları ile orantılı olmalıdır. F bu ortak oranı göstersin, böylece

$$A = \frac{f}{n_3^2}\left(\frac{m_2^2}{a^2} + \frac{m_1^2}{b^2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}
B = \dfrac{f}{n_3^2}\left(\dfrac{l_2^2}{a^2} + \dfrac{l_1^2}{b^2}\right) \\[2ex]
H = -\dfrac{f}{n_3^2}\left(\dfrac{l_2 m_2}{a^2} + \dfrac{l_1 m_1}{b^2}\right) \\[2ex]
G = \dfrac{fem_2}{an_3} \\[2ex]
F = -\dfrac{fel_2}{an_3} \\[2ex]
\text{ve} \\
1 = -f(1-e^2)
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

olur. Bu ifadelerden şu kombinasyonu alırsak

$$F^2 - G^2 + A - B = \frac{(l_1^2 - m_1^2 + l_2^2 - m_2^2)}{n_3^2 a^2 (1-e^2)^2}$$

ve (13) ile (14) den yararlanarak

$$F^2 - G^2 + A - B = \frac{m_3^2 - l_3^2)}{n_3^2 a^2 (1-e^2)^2}$$

bulunur.

l_3 , m_3 ve n_3’ün (11) deki değerlerini koyarak

$$F^2 - G^2 + A - B = \frac{\cos(2\Omega) tg^2(i)}{p^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(20)$$

buluruz; burada

$$p = a(1-e^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

elipsin parametre uzunluğudur.

(19) denklemlerinden diğer bir kombinasyonu alırsak

$$FG - H = -\frac{(l_1 m_1 + l_2 m_2)}{n_3^2 a^2 (1-e^2)^2}$$

(15) ve (21) den

$$FG - H = \frac{l_3 m_3}{n_3^2 p^2}$$

Ve (11) den

$$FG - H = -\frac{\sin(2\Omega) tg^2(i)}{2p^2} \quad \text{...........................(22)}$$

bulunur. (20) ve (22)’den

$$(F^2 - G^2 + A - B)\sin(2\Omega) + 2(FG - H)\cos(2\Omega) = 0 \quad \text{…………..(23)}$$

Bulunur ki buradan Ω belirlenebilir. Ω 'nın değerinin 0 ile 180 arasında olduğu unutulmamalıdır. Ω 'nın bulunan bu değerini kullanarak (20) veya (22)’ den

$$\frac{tg^2(i)}{p^2}$$

değeri bulunur. Öte yandan (19) denklemlerinden aşağıdaki gibi bir kombinasyonu alalım:

$$F^2 + G^2 - (A + B) = \frac{(l_1^2 + m_1^2 + l_2^2 + m_2^2)}{n_3^2 a^2 (1 - e^2)^2}$$

Burada (13) ve (14)’ ü kullanarak,

$$F^2 + G^2 - (A + B) = \frac{(2 - n_1^2 - n_2^2)}{p^2 \cos^2(i)}$$

Bulunur. (9) ve (10)’ dan,

$$2 - n_1^2 - n_2^2 = 2 - \sin^2(i) = 2\cos^2(i) + \sin^2(i)$$

dir. Buna göre

$$F^2 + G^2 - (A + B) = \frac{2}{p^2} + \frac{tg^2(i)}{p^2} \quad \text{……………………….(24)}$$

Olur. Az önce $\frac{tg^2(i)}{p^2}$ nin bulunmuştu, o halde (24)’ den p^2 nin değeri elde edilir. p bulunduktan sonra $tg^2(i)$ ve i hesaplanabilir.

(19)’ dan

$$G = -\frac{e}{p}\frac{m_2}{\cos(i)}$$

$$F = \frac{e}{p}\frac{l_2}{\cos(i)}$$

bulunur. m_2 ile l_2 ‘nin (10)’dan bulunan değerlerini koyarak

$$\sin(\Omega)\sin(\omega)-\cos(\Omega)\cos(\omega)\cos(i)=\frac{Gp\cos(i)}{e} \quad \text{.................}(25)$$

$$\cos(\Omega)\sin(\omega)+\sin(\Omega)\cos(\omega)\cos(i)=-\frac{Fp\cos(i)}{e} \quad \text{.................}(26)$$

bulunur. (25)' i sin*(Ω)*ve (26)' yı cos*(Ω)*ile çarpıp toplayalım:

$$\sin(\omega)=\frac{p}{e}\cos(i)\left[G\sin(\Omega)-F\cos(\Omega)\right] \quad \text{.........................}(27)$$

Olur. Şimdide (25)'i cos*(Ω)* ve (26)' yı sin*(Ω)* ile çarpıp birbirinden çıkartalım:

$$\cos(\Omega)\sin(i)=-\frac{p}{e}\cos(i)\left[G\cos(\Omega)+F\sin(\Omega)\right] \quad \text{.................}(28)$$

(27) ve (28)' den

$$tg(\omega)=\frac{\left[F\cos(\Omega)-G\sin(\Omega)\right]\cos(i)}{F\sin(\Omega)+G\cos(\Omega)} \quad \text{...............................}(29)$$

Böylece bu bağıntıdan ω hesaplanabilir. e eksentrisitesi, ω, p, i, Ω büyüklükleri bilindiğinden (27) veya (28)' den bulunabilir. a yarım büyük ekseni (21) den çıkarılabilir.

7 yörünge elemanından 5 tanesi Kowalsky yöntemi ile bulunurken geriye iki yörünge elemanı *P* peryodu ile periastrondan geçiş zamanı *T* 'nin bulunması kaldı. Bu elemanların bulunması yöntemden bağımsız olup şu şekilde bulunur. Gözlemlerden bir t zamanına karşılık gelen ρ ve θ değerleri bilinmektedir. (3)' den

$$tg(v+\omega)=tg(\theta-\Omega)\sec(i)$$

Buradan ω, Ω ve i az önce yöntemden bulunduğundan v gerçek anomalisi hemen bulunabilir. Bu durumda *E* eksentrel anomalisi

$$tg(\frac{v}{2})=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}tg(\frac{E}{2})$$

İfadesinden hesaplanabilir. M ortalama anomalisi

$$M = E - e\sin(E)$$

den bulunur. *M* aynı zamanda

$$M=n(t-T)=\frac{360}{P}(t-T)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Böylece herhangi bir t zamanı için *P* ve *T* bilinmeyenlerini içeren bir denklem bulunur. İki bilinmeyen olduğu için başka bir gözlem zamanı içinde benzer bir denklem daha yazılarak *P* ve *T* bulunabilir. Ancak pratikte en küçük kareler yöntemi ile çok sayıdaki gözlemler kullanılarak bulunur.

2.6 Kowalsky metodunun uygulanması

Bu metodun uygulanmasına yönelik ADS 11520 yıldızının eski yıllarda yapılmış gözlemlerini alarak ve bu gözlemleri bir kağıda çizerek buradan gerçek yörüngenin elemanlarını hesaplayabiliriz. Önce bu yıldıza ait gözlemleri (Çizelge 1.) verelim. Yani bir görsel çift yıldız için gerekli olan 3 gözlemsel büyüklük zaman, durum açısı ve iki yıldız arasındaki uzaklıktır (yay saniyesi cinsinden). Gözlemler aşağıdaki çizelgede verilmektedir. Bu gözlemlere göre çizilen gözlenen yörünge Şekil 10. da görülmektedir. Görünen elipsin eksenleri (x-ekseni 90 'de veya ekseni 0 'de) kestiği noktaların koordinatları şöyle ölçülüyor (ölçümler inch cinsinden):

$x = 4.98 \quad y = 1.77 \qquad x = -2.55 \quad y = -2.86$

$x = -4.73 \quad y = -3.12 \qquad x = 3.17 \quad y = -2.49$

Buna göre;

$x\, x = -23.5554 \qquad y\, y = -5.5224 \qquad x\, y = 7.2930$

$x + x = 0.25 \qquad y + y = -1.35 \qquad x\, y = -7.8933$

Çizelge 1. ADS 11520 yıldızına ait gözlemler.

TARİH	θ°	ρ''
1900,46	353,2	0,14
1901,56	338,3	0,14
1902,66	318,1	0,12
1903,40	293,6	0,11
1904,52	278,4	0,14
1905,53	224,8	0,12
1906,48	199,1	0,13
1907,30	193,5	0,14
1908,39	178,1	0,15
1909,67	150,4	0,10
1910,56	47,0	0,11
1911,55	18,7	0,15
1912,57	356,1	0,15
1914,55	331,2	0,14
1914,55	330,2	0,19
1915,52	306,4	0,15
1916,24	277,2	0,13
1916,63	243,0	0,16
1916,76	248,8	0,14
1917,62	222,5	0,10
1917,64	228,1	0,14
1918,52	200,4	0,14
1918,76	196,9	0,14
1919,62	188,4	0,15
1920,37	173,6	0,16
1920,67	172,6	0,16
1921,52	143,5	0,15

1921,53	144,4	0,12
1923,57	10,9	0,14
1923,76	11,8	0,18
1924,51	354,9	0,15
1924,65	344,2	0,12
1925,61	340,6	0,15
1928,63	272,2	0,14
1931,66	187,5	0,14
1932,78	177,7	0,15
1933,60	159,3	0,11

$x^2_a = 6,5025$ $y^2_a = 8,1796$

$x^2_a = 10,0489$ $y^2_a = 6,2001$

Bu değerlerden elips denkleminin beş sabiti şöyle bulunur:

$$A = \frac{1}{x_1.x_2} = -0,04245$$

$$B = \frac{1}{y_1 y_2} = -0,18108$$

$$F = -\frac{y_1 + y_2}{2y_1 y_2} = -0,12223$$

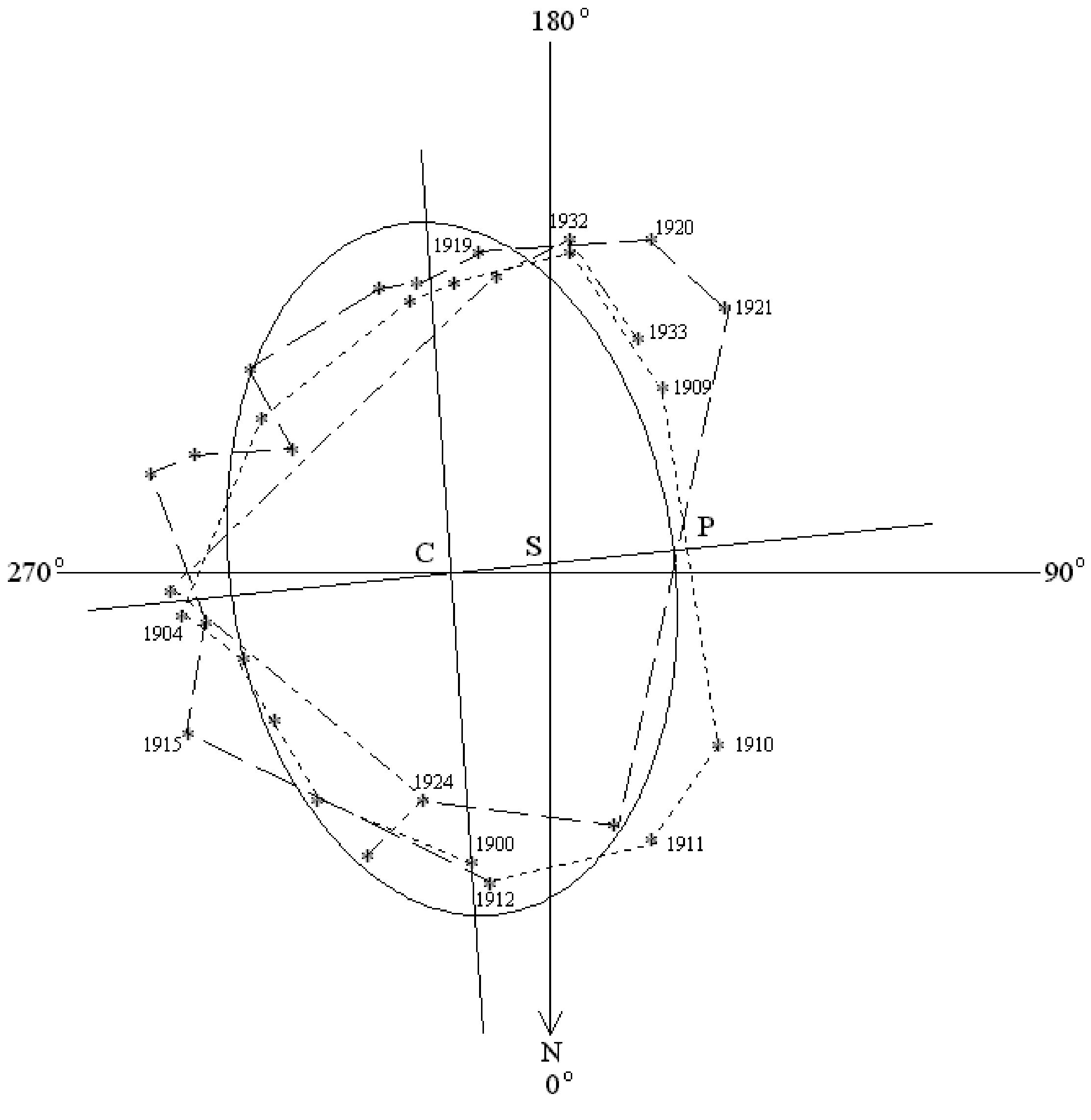
$$G = -\frac{x_1 + x_2}{2x_1 x_2} = 0,00531$$

ve x_a ve y_a koordinatlarından H için

$$H_a = -\frac{Ax_a{}^2 + By_a{}^2 + 2Gx_a + 2Fy_a + 1}{2x_a y_a} = 0,00584$$

ve benzer şekilde x_b ve y_b için

$H_b = 0,00590$
Ortalama alırsak
H = 0,00587 bulunur.
Bu sabitleri de birleştirerek


180°
1932
1920
1919
1921
1933
1909
P
C
S
270°
90°
1904
1915
1910
1924
1911
1900
1912
N
0°

Şekil 10.

$$\frac{tg^2(i)}{23,697} = 0,15409$$

$$tg^2(i) = 3,6514$$
$$tg(i) = 1,9109$$
$$i = 62^0,376$$

bulunur. (29) bağıntısını kullanarak, yani

$$tg(\omega) = \frac{\{(F\cos(\Omega) - G\sin(\Omega)\}\cos(i)}{F\sin(\Omega) + G\cos(\Omega)}$$

ve burada F,G,Ω, ve i'yi yerine koyarsak

$$tg(\omega) = \frac{\{-0,12223\cos(2,43) - 0,00531\sin(2,43)\}\cos(62,376)}{-0,12223\sin(2,43) + 0,00531\cos(2,43)}$$

$$tg(\omega) = -\frac{0,0567275}{1,22821 * 10^{-4}} = -4,61870 * 10^2$$

$\varpi = 90^0.1$

bulunur. (27) veya (28) denkleminden

$$\sin(\omega) = \frac{p}{e}\cos(i)\{G\sin(\Omega) - F\cos(\Omega)\}$$

değerleri yerine koyarsak

$$\sin(90,1) = \frac{4,86796}{e}\cos(62,376)\{0,00531\sin(2,43) + 0,12223\cos(2,43)\}$$

e = 0,276

elde edilir. P parametresinden
$p=a(1-e^2)$
$4,86796 = a[1-(0.276)^2]$
a = 5.269 inch ($0^{''}.1$, 3 inch olduğundan)
a= $0^{''}.176$
bulunur.

2.7 Kütlelerin belirlenmesi

Daha önce söylendiği gibi baş yıldız ile yoldaş arasındaki ρ uzaklığı mikrometre ile yay saniyesi cinsinden elde ediliyordu ve bunun sonucunda da yarım büyük eksen a da yay saniyesi cinsinden bulunmaktadır. Bu büyüklükleri lineer olarak alırsak, bunları Kepler'in 3. kanununda kullanabiliriz.

Eğer çift yıldızın parlaksı $p^{''}$ ve uzaklığı da d ise

$$p'' = \frac{1}{d}206265 = \frac{1}{d}\cos ec1'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

ifadesi yazılabilir. Burada d astronomik birim cinsindendir. Şimdi a_1 gerçek yörüngenin yarı büyük ekseni olsun ve astronomik birimle ifade edilsin. Bu halde yay saniyesi cinsinden iki yıldız arasındaki uzaklığa a dersek,

$$a'' = \frac{a_1}{d}206265 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

yazılabilir. (1)'i kullanarak

$$a_1 = \frac{a''}{p''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

bulunur. Yani şimdi a_1 uzaklığı AB cinsindendir. Kepler'in 3. kanununu yazarsak

$$\frac{a^3{}_1}{P^2} = \frac{G}{4\pi^2}(M_1 + M_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

olur. Şimdi dünyanın güneş etrafındaki yörüngesini gözönüne alalım.

$$\frac{a^3{}_0}{P^3{}_0} = \frac{GM_\odot}{4\pi^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

denklemi yazılabilir. Burada $M_\odot$ güneşin kütlesi (arzın kütlesi ihmal ediliyor), a_0 dünya-güneş uzaklığı, P_0'da dünyanın dolanma peryodudur. Burada a_0 = 1 AB, P_0 = 1 yıl ve güneşin kütlesi de kütle birimi olarak alınırsa,

$G=4\pi^2$ olur.

Bu formül (4)'de çift-yıldız sistemi için yerine konursa

$$\frac{a^3{}_1}{P^2} = M_1 + M_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

bulunur. Bu denklemde yıldızın kütleleri güneş kütlesi cinsinden, P yıl ve a_1 de AB cinsindendir. Böylece gözlemlerden a_1 ve P bulunabilirse yıldızların kütlelerinin toplamını (M_1 + M_2)) elde edebiliriz. Görsel çift yıldızların çoğu için kütleleri (1/5)$M_\odot$ ile 50$M_\odot$ arasında olmakla beraber ortalama olarak 2$M_\odot$ civarındadır.

Eğer (6) da (3)'ü koyarsak

$$M_1 + M_2 = \frac{a''^3}{p''^3 P^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

bulunur. Yani bu denklemle, paralaksı ve yörüngesi bilinen bir çift yıldızın toplam kütlesini bulabiliriz.

2.8 Dinamikel Paralaks

(7) denklemini p'' ‘ye göre çözersek

$$p'' = \frac{a''}{P^{2/3}(M_1 + M_2)^{1/3}}$$

olur. Burada eğer a ve P gözlemlerden biliniyor ve $M_1 + M_2 = 2M_\odot$ olarak kabul edersek, bu durumda elde edilen paralaksa dinamikel paralaks adı verilir. Bu ismin verilmesinin nedeni, bu denklemin dinamiğin prensiplerini kullanarak çıkartılmasıdır. Burada bir hususu daha belirtmemiz gerekir. Görsel çift yıldızların çoğu için, sistemin toplam kütlesi güneş kütlesinin iki katı olarak bulunmuştur. Bu nedenle yukarıdaki denklemde toplam kütle $2M_\odot$ olarak alınmıştır. Verilen herhangi bir halde şüphesiz $(M_1 + M_2)$’nin tam değeri bilinmemektedir. Fakat denklemde küp kök olduğundan $(M_1 + M_2)$’de yapılan bir hata denklemde 1/3’den dolayı daha küçük olacaktır. Yıldızların uzaklıklarının gerekli olduğu bazı araştırmalarda dinamikel paralakslar önemli bilgiler verebilirler.