YILDIZLARDA SICAKLIK(T) PROBLEMİ DERS-4 T→1

Gazlarda, ideal gaz kanununa göre

$$P.V = R.T$$

Burada $R$ = sbt (Gaz sabitidir ve $R = 8{,}314\ JK^{-1}.mol^{-1}$

$\mu$ = moleküler ağırlık olsun.

Bazı hatırlatmalar;

Atom gram = Her elementten atom ağırlığına eşit miktarda gram alınırsa, buna 1 atom gram element denir.

Her gazın 1 mol. gramı için R gazların üniversal sabitidir.

$R = 8{,}314 \times 10^{7}$ → ideal gazların üniversal sabitidir.

Bazı uygulamalar;

alınan gaz: $\mu$ gram olsun.

$\rho = \dfrac{\text{kütle}}{\text{hacim}} = \dfrac{\mu}{V}$ olduğundan hacim için $V = \dfrac{\mu}{\rho}$ dır.

(yoğunluk)

$P = \dfrac{1}{V} . RT$ olduğundan $P = \dfrac{\rho}{\mu} . R.T$ dir. Pay ve paydayı $m_H$ ile çarpalım.

$P = \dfrac{\rho}{\mu . m_H} . R.T.m_H$ olur. Boltzaman sabiti $k = R.m_H$ olduğundan

$P = \dfrac{k.\rho T}{\mu m_H}$ olur. $m_H = 1{,}67 \times 10^{-24}$ gr dır.

$\mu m_H$ = mevcut gazın içindeki parçacıkların kütleleridir. Buna göre de

$\dfrac{\rho}{\mu m_H}$ = birim hacimdeki parçacık sayısıdır.

$\dfrac{\rho}{\mu m_H} = N_1$ dersek $\boxed{P = k.N_1.T}$ elde edilir.

Bu bağıntıya Gazların HAL DENKLEMİ denir.

Özet olarak, Hal denklemi $T \rightarrow 2$

$P = k \cdot N_1 \cdot T$ veya $P = \frac{k}{\mu H_H} \rho T$ dır.

$\mu$ = yıldızı meydana getiren gazın molekül ağırlığı

$m_H$ = birim kütle.

ORTALAMA SICAKLIK ($\bar{T}$)

Tanım: $\bar{T} = \frac{1}{M} \int_0^R T\, dM(r)$

Tıpkı ortalama basınç ($\bar{P}$) için yaptığımız yaklaşımları burada da yapacağız. Böylece ortalama sıcaklık için bir alt sınır bulabileceğiz.

Not; Yıldızlarda basınç $P = P_G + P_R$ dır. Yani gaz basıncı ve radyasyon basıncının toplamıdır.

Eğer çok büyük kütleli bir yıldızla uğraşıyorsak, radyasyon basıncını ihmal edemeyiz. Güneş gibi daha küçük kütleli yıldızlarda radyasyon basıncı ihmal edilebilir. Bu tür yıldızlarda toplam basınca sadece gaz basıncı olarak kabul edebiliriz.

$P = \frac{k}{\mu m_H} \rho T$ de T yi çekip tanım denkleminde yerine koyalım ve bir alt sınır bulmaya gayret edelim.

$$T = \frac{\mu m_H}{k} \cdot \frac{P}{\rho}$$

küresel simetri denklemi

$$M\bar{T} = \int_0^R T \cdot dM(r) = \frac{\mu m_H}{k} \int_0^R \frac{P}{\cancel{\rho}} \overbrace{4\pi \cancel{\rho} r^2 dr}^{dM(r)}$$

$$= \frac{\mu m_H}{k} \int_0^R P \cdot \underbrace{4\pi r^2 dr}_{dV(r)}$$

$$= \frac{\mu m_H}{k} \int_0^R P \cdot dV(r)$$

$$\frac{kM}{\mu m_H} \cdot \bar{T} = \int_0^R P \cdot dV(r)$$ bulunur.

T→3

$$\int u.dv = u.v - \int v.du \qquad P = u\ ,\ dV(r) = dv \rightarrow v = V(r)$$

$$\int_0^R P\,dV(r) = \underbrace{P.V(r)\Big]_0^R}_{0-0=0} - \int_0^R V(r).dP$$

$$\int_0^R P\,dV(r) = -\int_0^R V(r).dP$$

$$\frac{k}{\mu m_H} M\bar{T} = -\int_0^R V(r).dP \text{ bulunur.}$$

Diğer taraftan $dP = -\dfrac{G m(r) dm(r)}{4\pi r^4}$ (Hidrostatik denge denklemidir)

$$\frac{k}{\mu m_H} M\bar{T} = \int_0^R V(r) \frac{G m(r) dm(r)}{4\pi r^4}$$

$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ yerine yazılırsa.

$$\frac{k}{\mu m_H} M\bar{T} = \frac{G4}{4\pi.3}\pi \int_0^R \frac{m(r)dm(r)}{r}$$

$$= \frac{G}{3}\int_0^R \frac{m(r).dm(r)}{r} \geqslant \frac{G}{3R}\int_0^R m(r).dm(r)$$

Şimdi varsayımlarımızı kullanalım.

I.VARSAYIM $r \leq R$ ve $\frac{1}{r} \geqslant \frac{1}{R}$ olur.

$$\frac{k}{\mu m_H} M\bar{T} \geqslant \frac{GM^2}{6R} \text{ düzenlersek.}$$

$$\boxed{\bar{T} \geqslant \frac{\mu m_H}{6k}.\frac{GM}{R}} \text{ bulunur.}$$

Not; Tamamen iyonlaşmış ortamda $\mu$ nün değişim aralığı = $\frac{1}{2} \leqslant \mu < 2$ dir.

T→4.

2. VARSAYIM; $\bar{\rho} \leq \overline{\rho(r)}$ olsun.

Denklemimizi yazalım.

$$\frac{k}{\mu m_H} M\bar{T} = \frac{G}{3}\int_0^R \frac{m(r)\,dm(r)}{r}$$

Diğer taraftan

$$\overline{\rho(r)} = \frac{m(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3} \rightarrow \frac{1}{r} = \left[\frac{\frac{4}{3}\pi\overline{\rho(r)}}{m(r)}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{k}{\mu m_H} M\bar{T} = \left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3}\frac{G}{3}\int_0^R \frac{m(r)\,\overline{\rho(r)}^{1/3}}{m(r)^{1/3}}\,dm(r)$$

$$= \left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3}\frac{G}{3}\int_0^R \overline{\rho(r)}^{1/3}\cdot m(r)^{2/3}\cdot dm(r)$$

$\overline{\rho(r)}$ nin yerine $\bar{\rho}$ koyarsak, integralin değeri küçüleceğinden

$$\frac{k}{\mu m_H} M\bar{T} \geqslant \left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3}\cdot\frac{G}{3}\,\bar{\rho}^{1/3}\int_0^R m(r)^{2/3}\cdot dm(r)$$

$$\geqslant \left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3}\frac{G}{3}\,\bar{\rho}^{1/3}\cdot\frac{3M^{5/3}}{5}$$ burada

$\bar{\rho} = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ olduğundan yerine konulursa,

$$\frac{k}{\mu m_H} M\bar{T} \geqslant \left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3}\cdot G\,\frac{M^{1/3}}{\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3}\cdot R}\cdot\frac{M^{5/3}}{5}$$ düzenlersek,

$$\boxed{\bar{T} \geqslant \frac{\mu m_H}{5k}\,\frac{GM}{R}}$$

bulunur. Böylece 2. varsayımdaki alt sınır ~%20 büyümüş oldu.